



# Poisson boundaries of quantum operations and quantum trajectories

Bunrith Jacques Lim

## ► To cite this version:

Bunrith Jacques Lim. Poisson boundaries of quantum operations and quantum trajectories. Mathematics [math]. Université Rennes 1, 2010. English. NNT: . tel-00637636

**HAL Id: tel-00637636**

**<https://theses.hal.science/tel-00637636>**

Submitted on 2 Nov 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

*Mention : Mathématiques*  
**Ecole doctorale Matisse**

présentée par

**Bunrith Jacques LIM**

préparée à l'IRMAR - UMR CNRS 6625  
Institut de recherche de mathématique de Rennes  
Université de Rennes I

**Frontières de Poisson  
d'opérations quantiques  
&  
trajectoires quantiques**

**Thèse soutenue à Rennes  
le 26 novembre 2010**

devant le jury composé de :

**Stéphane ATTAL**

Professeur à l'université Claude Bernard Lyon  
1, rapporteur

**Bachir BEKKA**

Professeur à l'université de Rennes 1, codirecteur de thèse

**Hans MAASSEN**

Professeur à l'université Radboud Nijmegen,  
rapporteur

**Dimitri PÉTRITIS**

Professeur à l'université de Rennes 1, codirecteur de thèse

**Jean RENAULT**

Professeur à l'université d'Orléans, président



*N'allez pas là où le chemin peut mener.  
Allez là où il n'y a pas de chemin et laissez une trace.*

Ralph Waldo Emerson

*Quand tu es arrivé au sommet de la montagne,  
continue de grimper.*

Proverbe chinois

*Peu importe l'issue,  
tant que le chemin qui y a mené fut coloré.*

Jimmy Lamboley



# Remerciements

Avec la soutenance de cette thèse de mathématiques s'achève en même temps mon aventure rennaise. En regardant le chemin parcouru, je ne peux être que reconnaissant vis-à-vis de toutes les personnes que j'ai connues et qui ont partagé cette aventure.

Je tiens tout d'abord à remercier Bachir Bekka et Dimitri Pétritis sans qui rien n'aurait été possible. Tous deux m'ont introduit, guidé, conseillé dans le monde de la recherche mathématique. Leur apport a été précieux. Je remercie Stéphane Attal et Hans Maassen d'avoir accepté d'être mes rapporteurs, d'avoir pris le temps et le soin de lire ma thèse de mathématiques, Jean Renault d'avoir accepté de présider mon jury de thèse. Tous trois ont été une source d'inspiration dans mon travail de part leurs contributions mathématiques.

J'aimerais remercier ma promotion de mathématiques de l'ENS Cachan de Ker-Lann avec qui j'ai partagé de nombreux bons moments : Erwan pour son humour et sa passion pour la musique, le grand Gilles pour son extraordinaire efficacité, le petit Gil pour son grand cœur, Jean-Philippe pour son incroyable générosité et son amour pour la cuisine française, Jimmy pour sa gentillesse et sa modestie, le grand Ludo pour sa poésie et son tact naturel, le petit Ludo pour sa bonne humeur, les Michel l'un pour sa grande compétitivité, l'autre pour sa sensibilité et son côté rêveur, Nicolas pour sa combativité et son amour de l'enseignement, Stéphanie pour nous avoir fait partager sa passion pour la danse.

La recherche mathématique s'est également accompagnée pour ma part de la recherche du *do* à travers la pratique du karaté Shotokan. Je tiens à remercier naturellement mes enseignants passionnés : Catherine, Jean-Jacques, Jean-Paul, Roger, Xavier, Yves, mais aussi mes compagnons d'armes en particulier Florian, Gwen et Julien.

Je remercie mes amis que j'ai connus à travers le monde de la danse : Yann, Dom, Léna, Maïwenn, July, Iona, Nadia, mais aussi Yannito et Julie pour leur esprit passionné, Guillaume et Laura pour leur authenticité, Vince et Carole pour leur bienveillance.

Je voudrais remercier mes compagnons de la tour de maths, en particulier Baptiste pour sa courtoisie, Basile pour sa noblesse, Jean-Louis pour la subtilité de son humour, Arnaud pour sa sympathie, Yoann pour son rire communicatif, Nirmal pour sa sagesse, Maher pour sa spontanéité, Gaël et Matthieu pour leur altruisme. Je remercie également David pour son hospitalité canadienne et sa disponibilité. Je lui souhaite d'ailleurs beaucoup de réussite pour la fin de sa thèse.

Je remercie ma famille : mes parents, Chhun-Hong et Georges de m'avoir constamment encouragé dans mes études. Sans eux, je ne serais jamais arrivé jusqu'ici.

Je tiens à remercier la famille Renouard : Serge, Agnès, Hugues et Franck pour leur gentillesse et leur aide précieuse, sans oublier Elvis pour son caractère fort intimidant.

J'aimerais enfin remercier Émilie, l'élue de mon cœur avec qui je partage énormément de bonheur. Merci pour tes encouragements, ta tendresse. Merci à toi d'être à mes côtés.

Merci à tous, c'est à travers votre rencontre, les riches moments que l'on a partagés que je me suis épanoui et que je continue à m'épanouir.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>11</b>
1.1	Un peu d'histoire . . . . .	11
1.2	Présentation du travail de recherche . . . . .	12
1.2.1	Frontières de Poisson d'opérations quantiques . . . . .	12
1.2.2	Trajectoires quantiques et purification . . . . .	13
1.2.3	Frontières de Poisson sur un groupoïde mesuré . . . . .	14
1.3	Mathématiques utilisées . . . . .	15
1.4	Présentation des chapitres . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Fondements de la mécanique quantique</b>	<b>19</b>
2.1	L'expérience des polarisateurs . . . . .	19
2.2	Description quantique des polarisateurs . . . . .	22
2.3	Axiomes de la mécanique classique . . . . .	23
2.4	Axiomes de la mécanique quantique . . . . .	23
2.5	Extension des outils mathématiques et notations de Dirac . . . . .	24
2.6	Introduction à la théorie quantique de l'information . . . . .	26
2.6.1	Qubit . . . . .	26
2.6.2	Qubits multiples . . . . .	28
2.6.3	Portes quantiques . . . . .	28
2.6.4	Intrication d'états quantiques . . . . .	29
2.7	Pas de duplication possible . . . . .	30
2.8	Nouvelles possibilités quantiques . . . . .	30
2.8.1	Téléportation . . . . .	31
2.8.2	Codage superdense . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Éléments de la théorie des opérateurs</b>	<b>35</b>
3.1	Algèbres de Cuntz et dilatation . . . . .	35
3.2	Equivalence unitaire entre opérateurs normaux compacts . . . . .	36
3.3	Topologies sur $B(\mathcal{H})$ . . . . .	38
3.4	Étude des états sur $B(\mathcal{H})$ . . . . .	41
3.4.1	Décomposition d'un état de $B(\mathcal{H})$ . . . . .	41
3.4.2	États normaux . . . . .	41
3.5	Algèbres fortement compacts . . . . .	43
3.6	Quelques propriétés des algèbres de von Neumann . . . . .	44
3.6.1	Le théorème de Sakaï . . . . .	44
3.6.2	Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par un groupe . . . . .	44



<b>4</b>	<b>Applications complètement positives</b>	<b>47</b>
4.1	Applications complètement bornées . . . . .	47
4.2	Théorème de Stinespring . . . . .	48
4.3	Unicité de la structure de $C^*$ -algèbre sur un système d'opérateurs . . . . .	49
4.4	Applications complètement positives sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . . . . .	50
4.5	Exemples de canaux . . . . .	51
4.6	Injectivité et enveloppe injective . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Frontières de Poisson d'un groupe discret</b>	<b>55</b>
5.1	Généralités . . . . .	55
5.1.1	Marche aléatoire sur un groupe . . . . .	55
5.1.2	Frontière de Poisson . . . . .	57
5.1.3	Identification de la frontière de Poisson . . . . .	58
5.1.4	Le critère d'entropie . . . . .	59
5.2	Moyennabilité et frontières de Poisson . . . . .	59
5.2.1	Groupes moyennables . . . . .	59
5.3	Exemples . . . . .	61
5.3.1	Le groupe des allumeurs de réverbères . . . . .	61
5.3.2	Le groupe de Baumslag-Solitar . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Frontière de Poisson d'une opération quantique</b>	<b>65</b>
6.1	Introduction . . . . .	65
6.2	Some general properties . . . . .	66
6.3	Identification of the Poisson boundary and minimal isometric dilation . . . . .	69
6.3.1	The Poisson boundary as a von Neumann algebra . . . . .	69
6.3.2	Minimal isometric dilation of a quantum operation . . . . .	70
6.4	Quantum channels and trace preserving condition . . . . .	72
6.4.1	The case of finite dimension . . . . .	72
6.4.2	The case of infinite dimension . . . . .	73
6.5	Poisson boundaries of a discrete group . . . . .	75
6.5.1	The right convolution operator . . . . .	76
6.5.2	The commuting algebra of Kraus operators of $\Phi_\mu$ . . . . .	77
6.6	A counter-example to two conjectures . . . . .	78
6.6.1	Properties of lamplighter groups . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Frontière de Poisson d'un groupoïde <math>s</math>-discret</b>	<b>81</b>
7.1	Généralités . . . . .	81
7.1.1	Groupoïdes mesurables . . . . .	83
7.1.2	Opérateur de Markov invariant sur un groupoïde borélien . . . . .	83
7.1.3	Action d'un groupoïde sur un espace . . . . .	85
7.2	Trajectoires et frontière de Poisson commutative . . . . .	86
7.2.1	Trajectoires . . . . .	86
7.2.2	Identification de la frontière de Poisson . . . . .	87
7.3	Frontière de Poisson non-commutative . . . . .	87
7.3.1	Opérateur de convolution non-commutatif . . . . .	87
7.3.2	Harmonicité dans $B(\mathcal{H})$ . . . . .	90
7.3.3	Identification de $\mathbb{H}_\mu(G, B(\mathcal{H}))$ . . . . .	91
7.3.4	Preuve du théorème 7.33 . . . . .	93
7.4	Moyennabilité d'un groupoïde . . . . .	94

<b>8</b>	<b>Trajectoires quantiques</b>	<b>97</b>
8.1	Introduction . . . . .	97
8.2	Normal states on $B(\mathcal{H})$ . . . . .	100
8.2.1	Characterization of normal states on $B(\mathcal{H})$ . . . . .	100
8.2.2	Pure and mixed normal states on $B(\mathcal{H})$ . . . . .	100
8.3	Extension of Nielsen inequalities . . . . .	101
8.4	Quantum trajectory associated with a measurement . . . . .	104
8.4.1	Definition of the quantum trajectory . . . . .	104
8.4.2	Properties of the quantum trajectory . . . . .	105
8.5	Mixed quantum measurements . . . . .	106
8.5.1	Properties of $\Delta_m$ . . . . .	107
8.5.2	An application of the Poisson boundary of a quantum channel . . . .	111
8.5.3	Properties of a mixed quantum measurement . . . . .	112
8.6	Ergodicity of the quantum trajectory . . . . .	114
8.6.1	Stationary normal states . . . . .	114
8.6.2	Ergodic theorem . . . . .	114
8.7	Conclusion . . . . .	118
8.8	Acknowledgements . . . . .	118
8.9	Appendix . . . . .	118
<b>9</b>	<b>Poisson boundaries of quantum operations</b>	<b>119</b>
9.1	Introduction . . . . .	119
9.2	Background . . . . .	120
9.3	Unital quantum channels . . . . .	121
9.4	Poisson boundaries associated with random walks on a discrete group . . .	123
9.4.1	The right convolution operator . . . . .	123
9.4.2	The commuting algebra of Kraus operators of $\Phi_\mu$ . . . . .	124
9.5	A counter-example to two conjectures . . . . .	126
9.5.1	Lamplighter groups . . . . .	126
9.5.2	Properties of lamplighter groups . . . . .	126
9.6	Acknowledgements . . . . .	127
<b>10</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>129</b>



# Chapitre 1

## Introduction

Le travail de cette thèse de mathématiques s'inscrit dans le domaine des fondements mathématiques de la mécanique quantique et de la théorie quantique de l'information. À travers cette thèse, nous allons aborder des domaines connexes à la théorie quantique : la théorie des opérateurs ( $C^*$ -algèbres et algèbres de von Neumann), la théorie des frontières de Poisson. Les enjeux principaux de cette thèse sont de généraliser à la dimension infinie des résultats valables en dimension finie, d'apporter de nouveaux résultats notamment en théorie quantique de l'information et de généraliser des résultats sur les frontières de Poisson commutatives et non commutatives de groupes discrets au cas des groupoïdes  $s$ -discrets.

### 1.1 Un peu d'histoire

Face à des phénomènes physiques qui ne trouvaient pas d'explications et de formalisme mathématique satisfaisants, la mécanique quantique est née au début du 20<sup>e</sup> siècle. Elle donne une explication des phénomènes physiques à l'échelle des particules élémentaires (électrons, photons...). Ses fondements reposent sur des axiomes purement mathématiques. Ainsi l'étude des outils mathématiques de la mécanique quantique est donc indispensable pour mieux la comprendre. Malgré son aspect contre-intuitif, il n'est connu à ce jour aucune expérience physique qui la mette en défaut. La mécanique quantique a fourni ces quinze dernières années de riches applications notamment dans le domaine de la théorie quantique de l'information. Parallèlement les progrès technologiques ont permis de réduire la taille des composants électroniques de manière impressionnante. Bientôt, on pense pouvoir fabriquer des transistors de la taille de quelques atomes. À une telle échelle, les effets de la mécanique quantique ne pourront plus être négligés. L'idée qui est apparue auprès des physiciens dans les années 80 est la suivante : au lieu d'être gênés par les effets quantiques, pourquoi ne pas en tirer profit en construisant un ordinateur s'appuyant sur les propriétés de la mécanique quantique. C'est ainsi que naquit l'idée de l'ordinateur quantique et la théorie quantique de l'information. La théorie quantique de l'information a pour but d'unifier la mécanique quantique et la théorie de l'information. Cette théorie prend tout son essor à partir de 1994, quand Shor publie un algorithme quantique (c'est-à-dire basé sur la logique quantique) qui permet en théorie de décomposer de grands nombres entiers en facteurs premiers en un temps polynomial. Cette découverte suscite de l'excitation parmi les chercheurs et relance la course à la construction d'un ordinateur quantique. En effet la plupart des systèmes de cryptage actuels repose sur le cryptage RSA et ce dernier utilise le fait qu'on ne sait pas en pratique à l'heure actuelle décomposer en facteurs premiers des grands nombres entiers en un temps raisonnable.

Le travail de cette thèse s'inscrit dans l'étude des outils mathématiques utilisés en

mécanique quantique, notamment ceux utilisés en théorie quantique de l'information. Nous allons nous intéresser principalement à deux notions : les trajectoires quantiques obtenues en effectuant des mesures quantiques répétées sur un système et à l'ensemble des points fixes d'une opération quantique, que l'on appelle aussi frontière de Poisson. Il existe déjà de nombreux travaux concernant ces deux notions et beaucoup de résultats en dimension finie. L'un des objectifs principal de cette thèse est de généraliser ces résultats en dimension infinie et de compléter les résultats existants. Dans l'étude des frontières de Poisson, nous utilisons le lien entre la théorie quantique de l'information et la théorie probabiliste des frontières de Poisson, qui est peu connu.

## 1.2 Présentation du travail de recherche

Ce travail de thèse a donné lieu à trois articles dont un en préparation :

1. "Noncommutative Poisson boundaries of quantum operations" [51] publié dans J. Math. Phys. 51, 052202 (2010) ;
2. "Mixed quantum measurements and quantum trajectories on infinite-dimensional Hilbert" [50] soumis pour publication ;
3. "Poisson boundaries of  $s$ -discrete groupoids" (en préparation).

Donnons un aperçu de ces résultats.

### 1.2.1 Frontières de Poisson d'opérations quantiques

En théorie quantique de l'information et en physique quantique, on fait appel aux applications normales complètement positives conservant l'unité qui s'écrivent sous la forme :

$$\Phi : B(\mathcal{H}) \ni x \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} V_i x V_i^* \in B(\mathcal{H}),$$

où  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert séparable et  $B(\mathcal{H})$  est l'algèbre des opérateurs bornés sur  $\mathcal{H}$ . Les applications normales complètement positives sont utilisées pour leur rigidité vis-à-vis de la positivité et du produit tensoriel. En physique quantique, ces applications représentent des mesures quantiques appliquées à un système quantique dont l'espace des états est associé à l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . En particulier, en théorie quantique de l'information, elles représentent des opérations quantiques ou des canaux quantiques véhiculant de l'information quantique. Dans l'article "Noncommutative Poisson boundaries of quantum operations", on s'intéresse à l'ensemble des points fixes de  $\Phi$ , noté  $\text{Fix}(\Phi)$  que l'on appelle aussi frontière de Poisson de  $\Phi$ . En théorie quantique de l'information,  $\text{Fix}(\Phi)$  est l'information qui n'est pas déformée lors de la communication et cet ensemble est utilisé pour corriger l'information qui est bruitée par le canal. En physique quantique,  $\text{Fix}(\Phi)$  contient les états invariants par la mesure quantique. L'enjeu de l'article est de comparer  $\text{Fix}(\Phi)$  au commutant de Kraus  $\{V_i, V_i^*\}'$ . Les applications normales complètement positives conservant l'unité ont été étudiées par divers spécialistes :

1. Kribs en théorie quantique de l'information [44, 31, 12],
2. Arias, Gheonda et Gudder comme outils mathématiques appliqués à la mécanique quantique [4],
3. Arveson, Bratelli, Jorgensen, Kishimoto et Werner dans la théorie des opérateurs à plusieurs variables [6, 5, 15],

4. Izumi comme opérateur de Markov généralisant les marches aléatoires sur les groupes discrets [35, 34].

Dans l'article "Noncommutative Poisson boundaries of quantum operations", on obtient principalement les résultats suivants : dans le cas où  $\Phi$  préserve la trace, on montre qu'il y a égalité entre  $\text{Fix}(\Phi) \cap B_0(\mathcal{H})$  et  $\{V_i, V_i^*\}' \cap B_0(\mathcal{H})$  où  $B_0(\mathcal{H})$  désigne l'ensemble des opérateurs compacts sur  $\mathcal{H}$ .

**Théorème 1.1** *Soit  $\Phi : B(\mathcal{K}) \ni x \longrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} T_i x T_i^* \in B(\mathcal{K})$  un canal quantique unifère, alors*

$$\{T_i, T_i^*\}' \cap B_0(\mathcal{K}) = \text{Fix}(\Phi) \cap B_0(\mathcal{K}).$$

Nous noterons désormais  $\mathcal{A}' := \{T_i, T_i^*\}'$  le commutant des opérateurs de Kraus de  $\Phi$ . En utilisant la théorie des groupes moyennables et les propriétés du groupe des allumeurs de réverbères ("lamplighter groups"), on démontre le théorème suivant :

**Théorème 1.2** *Soit  $G_k$  le groupe des allumeurs de réverbères. Pour toute mesure de probabilité  $\mu$  non-dégénérée sur  $G_k$ , on définit l'opération quantique unifère  $\Phi_\mu$  suivante :*

$$\Phi_\mu : B(l^2(G_k)) \ni x \longmapsto \Phi_\mu(x) := \sum_{g \in G_k} \mu(g) \rho(g) x \rho(g^{-1}) \in B(l^2(G_k)),$$

où  $\rho$  est la représentation régulière à droite de  $G_k$  sur  $l^2(G_k)$ .

Si  $k \geq 3$ , il existe une mesure de probabilité  $\mu$  non-dégénérée sur  $G_k$  telle que  $\mathcal{A}'$  soit injective et telle que  $\text{Fix}(\Phi_\mu) \neq \mathcal{A}'$ .

Ce théorème nous permet de répondre négativement à deux conjectures posées par Arias, Gheonda et Gudder concernant l'injectivité et l'enveloppe injective de  $\text{Fix}(\Phi)$  dans [4].

**Conjecture 1.3** *Soit  $\Phi$  une opération quantique unifère. Soit  $\mathcal{A}'$  le commutant des opérateurs de Kraus de  $\Phi$ . Si  $\mathcal{A}'$  est injective alors  $\text{Fix}(\Phi) = \mathcal{A}'$ .*

**Conjecture 1.4** *Soit  $\Phi$  une opération quantique unifère. Soit  $\mathcal{A}'$  le commutant des opérateurs de Kraus de  $\Phi$ . Alors  $\text{Fix}(\Phi)$  est l'enveloppe injective de  $\mathcal{A}'$ .*

### 1.2.2 Trajectoires quantiques et purification

Notre intérêt s'est porté sur les mesures quantiques répétées et de la purification asymptotique. Ces notions nous conduisent à l'étude des trajectoires quantiques. En physique quantique, certaines expériences (comme celle du Maser décrites dans [76] ou en optique [63]) exigent de répéter plusieurs fois la même mesure quantique.

$$x_0 \xrightarrow{\text{première mesure}} x_1 \xrightarrow{\text{deuxième mesure}} x_2 \dots \xrightarrow{\text{nième mesure}} x_n,$$

où  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'états quantiques. Nous obtenons ainsi notre trajectoire quantique. Une des questions que l'on se pose est de savoir à quelles conditions sur la mesure quantique, l'état du système quantique tend à se purifier asymptotiquement. Cette question a aussi son utilité dans d'autres domaines. En effet, le formalisme des mesures répétées est aussi utilisé pour mettre en oeuvre une méthode de distillation sémantique de l'ADN dans [71] : on cherche à extraire l'information contenue dans des gènes responsables de certaines maladies. Kümmerer et Maassen ont démontré dans le cadre de la dimension finie et dans

le cas où la mesure physique est à valeurs dans un ensemble fini d'états quantiques, qu'il y a purification asymptotique si la mesure quantique n'est pas quasi isométrique [53]. Le but de l'article "Mixed quantum measurements and quantum trajectories on infinite-dimensional Hilbert" [50] est de généraliser ce résultat à la dimension infinie (dans le cadre d'un espace de Hilbert séparable de dimension infinie) et dans le cas où la mesure quantique est à valeurs dans un ensemble dénombrable d'états quantiques. On démontre que dans le cas où la mesure quantique est à valeurs dans une algèbre fortement compacte, il y a purification asymptotique si la mesure quantique n'est pas quasi isométrique.

Notons  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  l'ensemble des états normaux sur  $\mathcal{H}$  et  $B_{00}(\mathcal{H})$  l'ensemble des opérateurs de rang fini sur  $\mathcal{H}$ .

**Théorème 1.5** *Soit  $\mathcal{R}$  une algèbre fortement compacte de  $B(\mathcal{H})$ , on définit  $\mathcal{D} := \{x \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \cap B_{00}(\mathcal{H}) | \sqrt{x} \in \mathcal{R}\}$ . Considérons la mesure quantique définie par  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B(\mathcal{H})$  avec  $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^* a_i = I$  telle que pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $a_i \in \mathcal{R}$ .*

*Si la mesure quantique ne purifie pas asymptotiquement sur  $\mathcal{D}$  alors il existe une projection  $p \in B(\mathcal{H})$  avec  $\dim(\text{rank}(p)) \geq 2$  telle que :*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \exists \lambda_i \geq 0, p a_i^* a_i p = \lambda_i p.$$

Pour pouvoir généraliser le résultat de Kümmerer et Maassen, il a fallu généraliser l'inégalité de Nielsen en dimension infinie [58] à l'aide d'argument de convexité, étudier finement la topologie de l'ensemble des états normaux et utiliser des résultats sur la frontière de Poisson des opérations quantiques.

**Théorème 1.6 (Inégalité de Nielsen généralisée)** *Considérons la mesure quantique définie par  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B(\mathcal{H})$  avec  $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^* a_i = I$ . Pour tout  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , on a l'inégalité suivante :*

$$\text{tr}(\rho^m) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \text{tr}(a_i \rho a_i^*) \text{tr} \left( \left( \frac{a_i \rho a_i^*}{\text{tr}(a_i \rho a_i^*)} \right)^m \right).$$

Un autre résultat de l'article est l'ergodicité de la mesure moyenne induite par la mesure quantique.

**Théorème 1.7** *Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la trajectoire quantique d'état initial  $x_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ , il existe alors une variable aléatoire  $X_\infty$  à valeurs dans les états stationnaires telle que :*

$$WOT^* \text{-} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n = X_\infty \quad \mathbb{P}_{x_0}\text{-presque partout.}$$

### 1.2.3 Frontières de Poisson sur un groupoïde mesuré

Le travail sur l'identification des frontières de Poisson commutative et non-commutative sur les groupes discrets munis d'un opérateur de Markov nous conduit à généraliser ces dernières au cadre des groupoïdes  $s$ -discrets. Izumi [35] a en effet identifié la frontière de Poisson de l'opérateur de convolution à droite  $\Phi$  sur un groupe discret  $G$  dans le cadre non commutatif avec le produit croisé :

$$\text{Fix}(\Phi) = L^\infty(\Omega, \nu) \rtimes G,$$

où  $L^\infty(\Omega, \nu)$  est la frontière de Poisson de  $G$  dans le cadre commutatif. Il est naturel de chercher à identifier la frontière de Poisson non commutative d'un groupoïde mesuré  $s$ -discret. Kaimanovich a obtenu plusieurs résultats sur les frontières de Poisson de groupoïdes

commutatives [39]. L'objet du chapitre 7 et de l'article "Poisson boundaries of discrete groupoids" est d'établir une telle description. En s'appuyant sur les travaux de Jaworski et Neufang [36] sur l'équation de Choquet-Deny, nous identifions la frontière de Poisson non-commutative d'un groupoïde mesuré  $s$ -discret.

**Théorème 1.8** *Soit  $(G, \lambda, \nu)$  un groupoïde  $s$ -discret mesuré muni d'un opérateur de Markov  $\Phi_\mu$  sur  $G$ . Soit  $(\Omega, \tilde{\mathbb{P}})$  la frontière de Poisson commutative de  $\Phi_\mu$ . La frontière Poisson  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$  non-commutative de  $G$  muni de  $\Phi_\mu$  est isomorphe en tant qu'algèbre de von Neumann à  $L(G \ltimes \Omega)$  qui est l'algèbre de von Neumann de l'extension de Poisson  $G \ltimes \Omega$ .*

En utilisant les résultats sur la moyennabilité d'un groupoïde [1], ce théorème nous permet de donner une nouvelle preuve du résultat suivant dû à Kaimanovich [39] :

**Théorème 1.9** *Soit  $(G, \lambda, \nu)$  un groupoïde  $s$ -discret mesuré muni d'un opérateur de Markov  $\Phi_\mu$ . Soit  $(\Omega, \tilde{\mathbb{P}})$  la frontière de Poisson commutative de  $\Phi_\mu$ . Le groupoïde  $G \ltimes \Omega$  est moyennable.*

### 1.3 Mathématiques utilisées

Les outils mathématiques que nous avons été amenés à étudier et à utiliser sont assez diversifiés.

1. Le passage de la dimension à la dimension infinie exige l'utilisation de la théorie spectrale des opérateurs. Il a fallu étudier la topologie des **états normaux**, ainsi que les **algèbres fortement compactes**.
2. L'étude de la purification asymptotique nous a conduit à utiliser la théorie des processus stochastiques : étude des **martingales et des chaînes de Markov** à valeurs dans des opérateurs définis sur un espace de Hilbert.
3. Pour pouvoir mieux comprendre la frontière de Poisson, il a fallu la munir d'une structure d'**algèbre von Neumann**. Nous nous sommes donc intéressés aux  $C^*$ -algèbres ainsi qu'aux algèbres de von Neumann.
4. L'étude des **applications complètement positives** nous a conduits à étudier les travaux de Arveson, de Choi et de Kribs, puis à la caractérisation de l'**injectivité d'un système d'opérateurs**.
5. Notre intérêt s'est tourné vers les marches aléatoires sur des groupes discrets, où la **frontière de Poisson** apparaît. La frontière de Poisson d'un opérateur quantique est la généralisation dans un cadre non-commutatif de cette notion. Pour répondre aux conjectures de Arias, Gheonda et Gudder. Nous avons étudié les propriétés de **moyennabilité** et les frontières de Poisson de groupes, notamment ceux définis par des produits en couronne.
6. L'extension des résultats sur les frontières de Poisson des groupes discrets au cas des groupoïdes  $s$ -discrets nous a conduit à étudier l'**équation de Choquet-Deny** [36].

### 1.4 Présentation des chapitres

À travers cette thèse, nous allons étudier les objets mathématiques qui interviennent en mécanique quantique, nous donnons dans les chapitres 2, 3, 4, 5 des résultats mathématiques établis plus ou moins récemment nécessaires à la compréhension des résultats de cette thèse qui sont reproduits aux chapitres 6, 7, 8, 9. Le chapitre 2 qui rappelle les



fondements de la mécanique quantique et qui donne une brève introduction à la théorie quantique de l'information, nous montre l'importance des algèbres d'opérateurs (chapitre 3) et des applications complètement positives (chapitre 4). Un chapitre est réservé aux frontières de Poisson de groupes discrets (chapitre 5), il permet de mieux comprendre, comment cette notion a priori probabiliste apparaît en théorie quantique de l'information.

Donnons un bref résumé des différents chapitres de cette thèse.

Le **chapitre 2** est une brève introduction au formalisme de la mécanique quantique. À travers l'expérience physique des polarisateurs, nous verrons pourquoi il a été nécessaire d'introduire cette théorie. Les axiomes de la mécanique classique, puis ceux de la mécanique quantique y sont présentés. Nous verrons que les outils mathématiques de la mécanique quantique font appel à la théorie des  $C^*$ -algèbres, à la théorie des algèbres de von Neumann et aux opérateurs à trace. Une introduction à la théorie quantique de l'information est présentée. Nous définissons mathématiquement la notion de qubit, l'unité de base de l'information quantique. Des exemples de portes logiques quantiques sont donnés et un bref aperçu du phénomène d'intrication est présenté avec des applications (impossibilité de dupliquer un état quantique, téléportation d'un qubit, codage superdense).

Dans le **chapitre 3**, nous introduisons les algèbres de Cuntz et évoquons les résultats de Pospescu concernant la dilatation isométrique minimale d'une suite d'opérateurs. Nous donnons des critères d'équivalence unitaire entre opérateurs compacts. Les différentes topologies sur  $B(\mathcal{H})$  sont présentées ainsi que les différents liens entre elles. Nous nous intéressons aux états sur  $B(\mathcal{H})$  : tout état de  $B(\mathcal{H})$  se décompose de manière unique comme une combinaison convexe d'un état normal et d'un état singulier. Des résultats de convergence d'une suite d'états normaux sont présentés. À la fin de ce chapitre, les algèbres fortement compactes et leur propriétés sont introduites. Les algèbres fortement compactes s'avèrent être un bon cadre d'étude pour les trajectoires quantiques en dimension infinie. Nous donnons enfin des résultats connus concernant les algèbres de von Neumann comme notamment le théorème de Sakai et nous rappelons la notion du produit croisé d'une algèbre de von Neumann par un groupe discret.

Les applications complètement positives font l'objet du **chapitre 4**. Ces dernières jouent un rôle fondamental en mécanique quantique car elles modélisent les opérations quantiques (mesures quantiques ou canal quantique). Nous définissons tout d'abord les applications complètement bornées sur un système d'opérateurs, avant de nous concentrer sur l'étude des applications complètement positives. Le théorème de dilatation de Stinespring est rappelé suivi de quelques applications utiles. L'unicité de la structure d'algèbre de von Neumann sur un système d'opérateurs injectif est évoquée. Les applications complètement positives  $\Phi : M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$  ont été caractérisées dans [69]. Nous présentons un résumé de ces caractérisations. Des exemples de canaux quantiques issus de la théorie quantique de l'information sont donnés. À la fin de ce chapitre, nous introduisons la notion d'injectivité et d'enveloppe injective d'un système d'opérateurs. Ces deux notions sont fondamentales pour bien comprendre l'article "Noncommutative Poisson boundaries of quantum operations".

Le **chapitre 5** est réservé à l'étude des frontières Poisson dans le cadre commutatif. Dans un premier temps, nous nous plaçons dans le cadre des marches aléatoires sur des groupes discrets, puis nous résumons certains résultats de Kaimanovich. En introduisant la notion d'entropie, il est possible de caractériser la trivialité de frontière de Poisson. Les liens entre la moyennabilité du groupe et la trivialité de la frontière de Poisson sont présentés. Nous étudions en dernier lieu les propriétés des frontières de Poisson des groupes des allumeurs de réverbères notés  $G_k$ .

Dans le **chapitre 6**, nous étudions les frontières de Poisson des opérations quantiques.

Nous verrons pourquoi ces dernières généralisent les frontières de Poisson commutatives. Ce chapitre a pour base l'article "Noncommutative Poisson boundaries of quantum operations" qui est reproduit dans le chapitre 9. Nous identifions en premier lieu la frontière de Poisson d'un opérateur et celle de sa dilatation isométrique minimale. Puis, nous répondons aux conjectures [4] de Arias, Gheonda et Gudder en utilisant la théorie des frontières de Poisson sur le groupe des allumeurs de réverbères.

La notion de frontière de Poisson s'étend aux groupoïdes. Heuristiquement, un groupoïde est un ensemble muni d'un produit qui n'est pas défini pour toutes les paires d'éléments de ce dernier. Le **chapitre 7** a pour but d'étudier les frontières de Poisson sur un groupoïde discret et de les identifier théoriquement. Nous nous intéresserons tout d'abord au cadre commutatif, puis en nous servant de l'étude du cas commutatif, nous identifions la frontière de Poisson non commutative sur un groupoïde  $s$ -discret muni d'un opérateur de Markov. Ceci nous permet de retrouver un résultat de Kaimanovich sur la moyennabilité de l'extension de Poisson.

Le **chapitre 8** est consacré à l'article "Quantum trajectories on Hilbert spaces" [50] soumis pour publication.

Le **chapitre 9** reproduit l'article "Noncommutative Poisson boundaries of quantum operations" [51] publié dans J. Math. Phys. 51, 052202 (2010).



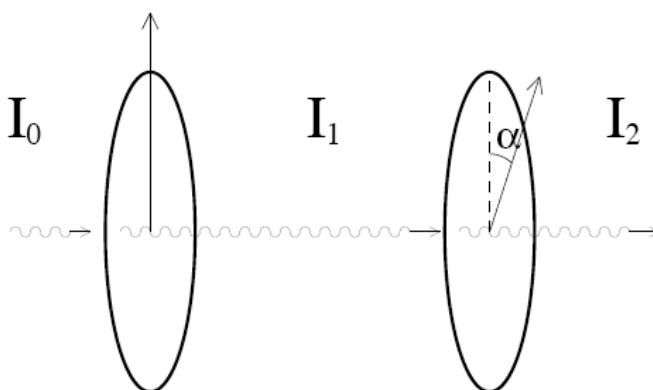
## Chapitre 2

# Fondements de la mécanique quantique

L'expérience des polarisateurs permet de rendre compte de l'importance du formalisme mathématique de la mécanique quantique. Après un bref aperçu des mathématiques utilisées en mécanique quantique, une introduction à la théorie quantique de l'information est présentée : nous y présentons les notions fondamentales de qubits, de portes quantiques logiques et d'intrication des états quantiques. En théorie quantique de l'information, nous allons voir l'impossibilité de dupliquer l'information. Nous verrons aussi des nouveautés qui n'ont pas de contre-partie classique telles que la téléportation de l'information et le codage superdense.

### 2.1 L'expérience des polarisateurs

Les filtres polarisateurs que l'on peut rencontrer dans notre quotidien (lunettes de soleil polarisantes, filtre polarisant pour appareil photos) sont couramment utilisés en optique pour leurs propriétés. Les polarisateurs s'avèrent être un système quantique. Nous allons voir que l'action des polarisateurs n'est pas modélisable avec les axiomes de la mécanique classique. Nous donnerons alors une description quantique des polarisateurs. Envoyons un faisceau lumineux sur deux polarisateurs fixés sur un axe horizontal comme sur la figure ci-dessous tirée de [46].



On constate qu'en faisant pivoter les polarisateurs autour de leur axe, l'intensité lumineuse à la sortie du second filtre varie. Fixons le premier polarisateur et tournons seulement

le deuxième polarisateur. Pour une certaine position du second filtre, l'intensité résultante est maximale. Partant de cette position, pivotons le second polarisateur autour de son axe d'un angle  $\alpha$ , l'intensité résultante diminue alors jusqu'à être nulle pour l'angle  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Notons  $I_0$  l'intensité de la lumière à l'entrée des filtres,  $I_1$  après le premier filtre,  $I_2$  à la sortie des deux filtres. Des mesures expérimentales soigneuses donnent :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{I_0}{2}, \\ I_2 &= I_1 \cos^2(\alpha). \end{aligned}$$

Les travaux de Max Planck et Albert Einstein ont montré que la lumière monochromatique est composée de petits paquets de photons de même énergie. On peut interpréter de manière statistique le facteur  $\cos^2(\alpha)$  : la probabilité qu'un photon traverse le second polarisateur, lorsque celui-ci forme un angle de  $\alpha$  est  $\cos^2(\alpha)$ . Ainsi la formule  $I_2 = I_1 \cos^2(\alpha)$  se comporte comme une moyenne pour un très grand nombre de photons. À chaque polarisateur tourné d'un angle  $\alpha$  par rapport à un axe horizontal, associons une variable aléatoire  $P_\alpha$  qui peut prendre seulement deux valeurs : 1 ou 0. Pour un photon  $\omega$ ,  $P_\alpha(\omega) = 0$  si le photon est absorbé par le polarisateur.  $P_\alpha(\omega) = 1$  si le photon traverse le polarisateur. Considérons deux polarisateurs inclinés respectivement d'un angle  $\alpha$  et  $\beta$ , nous avons alors :

$$\mathbb{E}(P_\alpha P_\beta) = \mathbb{P}(P_\alpha = 1 \text{ et } P_\beta = 1) = \frac{1}{2} \cos^2(\alpha - \beta).$$

Montrons qu'en modélisant de la sorte, nous rencontrons des difficultés. Considérons cette fois-ci trois polarisateurs  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  disposés horizontalement avec des inclinaisons respectives  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ . Soit  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  les trois variables aléatoires associées respectivement à ces trois polarisateurs. On a alors les relations :

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, \mathbb{E}(P_i P_j) = \frac{1}{2} \cos^2(\alpha_i - \alpha_j).$$

**Proposition 2.1** *Soit  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  trois variables aléatoires définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$ , on a alors l'inégalité suivante :*

$$\mathbb{P}(P_1 = 1, P_3 = 0) \leq \mathbb{P}(P_1 = 1, P_2 = 0) + \mathbb{P}(P_2 = 1, P_3 = 0).$$

*Preuve:* Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(P_1 = 1, P_3 = 0) &= \mathbb{P}(P_1 = 1, P_2 = 0, P_3 = 0) + \mathbb{P}(P_1 = 1, P_2 = 1, P_3 = 0) \\ &\leq \mathbb{P}(P_1 = 1, P_2 = 0) + \mathbb{P}(P_2 = 1, P_3 = 0). \end{aligned}$$

□

Dans notre exemple, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(P_i = 1, P_j = 0) &= \mathbb{P}(P_i = 1) - \mathbb{P}(P_i = 1, P_j = 1) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2(\alpha_i - \alpha_j) = \frac{1}{2} \sin^2(\alpha_i - \alpha_j). \end{aligned}$$

On peut ainsi appliquer l'inégalité de Bell, ce qui donne :

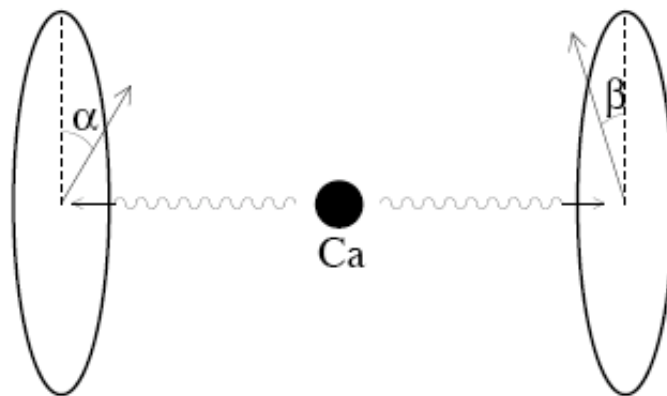
$$\frac{1}{2} \sin^2(\alpha_1 - \alpha_3) \leq \frac{1}{2} \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{1}{2} \sin^2(\alpha_2 - \alpha_3).$$

Or en prenant les valeurs  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{6}$  et  $\alpha_3 = \frac{\pi}{3}$ , on obtient :

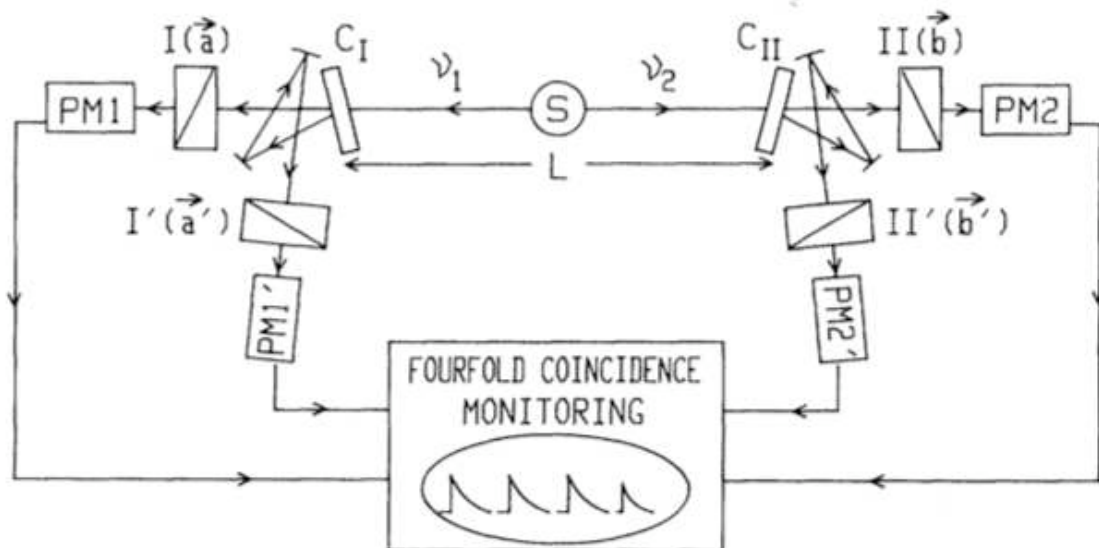
$$\frac{3}{8} \leq \frac{1}{8} + \frac{1}{8},$$

ce qui est contradictoire. La modélisation adoptée en terme de probabilités classiques n'est donc pas adaptée.

Une objection pourrait être soulevée concernant la modélisation précédente, notamment la définition des variables aléatoires  $P_\alpha$ . Le comportement d'un photon ayant déjà traversé le premier polarisateur est-il influencé par ce dernier? Pour répondre à cette critique, l'expérience des polarisateurs peut-être améliorée. En effet dans le domaine de l'optique quantique, il est possible de produire une paire de photons, telle que chaque photon se déplace dans un sens opposé et telle que le comportement de chaque photon soit opposé dans le sens suivant : si l'un des photons traverse le polarisateur, l'autre est forcément absorbé. Des atomes de calcium excités par un laser permettent une telle émission de paire de photons (voir la figure ci dessous tirés de [46]).



Cette expérience a été menée par Alain Aspect à Orsay [8]. Un bref aperçu de l'expérience est donné ci-après, deux polarisateurs sont postés à droite de la source et on fait de même à gauche.



En gardant, la modélisation précédente en termes de probabilités classiques, on viole à nouveau les inégalités de Bell [8]. Ajoutons un commentaire à cette expérience. Les arguments précédents sont valables pourvu que la mesure effectuée sur les photons à gauche

n'influence par la mesure sur le photon à droite. Il s'agit ici de l'hypothèse de localité en physique. Dans l'expérience d'Orsay, cette hypothèse est validée car l'intervalle de temps entre les deux mesures est plus petite que le temps que met un photon pour se déplacer entre les deux appareils effectuant la mesure. Ainsi en vertu du principe de causalité dans la théorie de la relativité, la première mesure ne peut influencer la seconde. Si on admet que le principe de causalité est valide en mécanique quantique (principe sur lequel s'accordent la grande majorité des physiciens), on ne peut pas modéliser l'expérience des polarisateurs avec la théorie classique des probabilités classiques.

## 2.2 Description quantique des polarisateurs

Comme nous l'avons vu l'expérience des polarisateurs ne peut être décrite par des probabilités classiques, nous allons donner une description respectant les axiomes de la mécanique quantique à l'aide d'un système à deux niveaux, c'est ce que l'on appellera un qubit.

Les états de polarisation d'un photon sont donnés par des droites vectorielles de  $\mathbb{C}^2$ , ce qui est équivalent à se donner un vecteur unitaire non nul engendrant cette droite vectorielle.

L'action d'un polarisateur est donné par un projecteur orthogonal  $P$  de  $\mathbb{C}^2$  sur une droite vectorielle de  $\mathbb{C}^2$ .

La probabilité qu'un photon traverse un polarisateur décrit par l'observable  $P$  est  $\langle \psi | P \psi \rangle$ .

On peut ainsi paramétrer l'ensemble de tous les états par des vecteurs unitaires de la forme :

$$\left\{ (\cos(\alpha), \exp(i\phi) \sin(\alpha)) \in \mathbb{C}^2 \mid \frac{-\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq \pi \right\}.$$

Avec cette paramétrisation, on peut décrire la polarisation d'un photon et l'observable associé à un polarisateur comme ci-après :

polarisation verticale	$(0, 1) \in \mathbb{C}^2$
polarisation horizontale	$(1, 0) \in \mathbb{C}^2$
polarisation d'angle $\alpha$	$(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \in \mathbb{C}^2$
polarisation d'angle $\pm \frac{\pi}{4}$	$\left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$
polarisation circulaire gauche/droite	$\left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{i}{\sqrt{2}} \right)$
polarisateur vertical	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
polarisateur horizontal	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
polarisateur d'angle $\alpha$	$\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \cos(\alpha) \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{pmatrix}$
polarisateur d'angle $\pm \frac{\pi}{4}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \pm \frac{1}{2} \\ \pm \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
polarisateur circulaire gauche/droite	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \pm \frac{i}{2} \\ \pm \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

## 2.3 Axiomes de la mécanique classique

Donnons brièvement les axiomes de la mécanique classique. Ceci nous permettra de mieux constater les différences entre un système classique et un système quantique. Ces axiomes ont été utilisés dans l'expérience des polarisateurs, où nous avons tenté de modéliser l'action de ces derniers classiquement.

**Axiome 2.2** *À tout système classique est associé un espace mesurable abstrait  $(\Omega, \mathfrak{T})$ . Les états du système sont alors donnés par les mesures de probabilité sur  $(\Omega, \mathfrak{T})$ . Les états purs du système sont alors les masses de Dirac.*

**Axiome 2.3** *À toute observable, c'est-à-dire toute quantité physique est associée une variable aléatoire  $X : \Omega \rightarrow E$  où  $(E, \mathcal{E})$  est un espace mesurable. La loi d'une mesure liée à une observable  $X$  sur un système à l'état  $\mu$  est la loi de  $X$  sachant  $\mu$ .*

**Axiome 2.4** *Toute évolution temporelle d'un système isolée classique est donnée par une transformation bijective mesurable  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  telle que  $T^{-1}$  soit mesurable et laissant invariant les états du système.*

## 2.4 Axiomes de la mécanique quantique

La mécanique quantique constitue le pilier d'un ensemble de théories physiques qu'on regroupe sous l'appellation générale de physique quantique. L'importance de la mécanique quantique tient au fait qu'elle prend le relais de la mécanique classique qui est incapable de décrire certains phénomènes du monde microscopique - atomes et particules - ainsi que certaines propriétés du rayonnement électromagnétique. En 1930, le mathématicien Von Neumann donne un cadre mathématique rigoureux à cette théorie physique. Les axiomes qui vont être présentés décrivent les règles de la mécanique quantique. Ce langage axiomatique est accepté de pratiquement tous les physiciens, car il a jusqu'à maintenant modélisé des expériences physiques avec une impressionnante précision.

**Axiome 2.5** *À tout système quantique donné correspond un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Les états de ce système correspondent alors aux états sur  $B(\mathcal{H})$ <sup>1</sup>.*

**Axiome 2.6** *À toute quantité physique (comme la position, la vitesse, l'énergie ou le spin ...) du système quantique est associé un opérateur autoadjoint  $X$  de  $B(\mathcal{H})$ . Ces derniers sont les observables du système quantique.*

Écrivons alors la décomposition spectrale de  $X$  :

$$X = \int_{\sigma(X)} \lambda dE(\lambda)$$

où  $E$  est la mesure spectrale de  $X$  et  $\sigma(X)$  le spectre de  $X$ .

**Axiome 2.7** *Les résultats d'une mesure sur ce système quantique d'une quantité physique  $X$  donne des nombres  $x \in \sigma(X)$ . Le résultat d'une mesure est aléatoire. La distribution de la mesure de probabilité est décrite comme ci-dessous. Considérons un système quantique dans l'état initial  $\phi$ . Soit  $A \subset \sigma(X)$  un borélien de  $\sigma(X)$ . Après mesure de l'observable*

---

1. C'est-à-dire des formes linéaires de  $B(\mathcal{H})$  positives de norme égale à 1. On se référera à 3.4 pour plus de détails.



$X$ , la valeur numérique est dans  $A$  avec probabilité  $\phi(E(A))$ . Après cette mesure, l'état du système devient :

$$\psi : B(\mathcal{H}) \ni x \rightarrow \phi(E(A)xE(A)) \in \mathbb{C}.$$

**Axiome 2.8** *L'évolution temporelle d'un système quantique isolé est donnée par un groupe à 1 paramètre d'opérateurs unitaires. L'une des observables fondamentales d'un système quantique est son énergie. L'observable lié à l'énergie est appelée Hamiltonien du système noté  $H$ . Ce dernier contrôle l'évolution temporelle du système. Posons :*

$$U_t = \exp(-itH).$$

*L'évolution de l'état du système est alors  $x \rightarrow \phi_t(x) = \phi(U_t x U_t^*)$ .*

**Axiome 2.9** *L'espace des états d'un système quantique composé est le produit tensoriel des espaces d'états des systèmes quantiques qui le composent.*

## 2.5 Extension des outils mathématiques et notations de Dirac

En adoptant des hypothèses supplémentaires sur l'ensemble des observables, on peut utiliser des résultats de la théorie des opérateurs. On peut supposer que l'ensemble des variables aléatoires  $\mathcal{A}$  d'un système quantique forme une sous-algèbre auto-adjointe d'un  $B(\mathcal{H})$  donné. Si on suppose que  $\mathcal{A}$  est fermé pour la norme d'opérateurs de  $B(\mathcal{H})$ , on obtient une  $C^*$ -algèbre. Si on suppose de plus que  $\mathcal{A}$  est fermé pour la topologie forte (SOT) dans  $B(\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{A}$  est une algèbre de von Neumann.

Les algèbres de von Neumann sont particulièrement agréables à utiliser. En effet, dans le théorème de décomposition spectrale d'un opérateur auto-adjoint, les projecteurs apparaissant dans la décomposition restent dans l'algèbre de von Neumann. De plus, le cadre des algèbres de von Neumann commutatives généralise les modèles classiques car toute algèbre de von Neumann commutative est isomorphe à un  $L^\infty(\Omega, \mu)$ .

Si l'on suppose que l'ensemble des observables forme une  $C^*$ -algèbre abstraite, on peut tout de même ramener l'étude à une algèbre d'opérateurs bornés. Dans le cadre de cette description, les états d'un système quantique correspondent aux états sur la  $C^*$ -algèbre, c'est-à-dire les formes linéaires  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  positives, de norme égales à 1. La construction GNS permet de représenter la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{A}$  dans une algèbre d'opérateurs  $B(\mathcal{H}_\phi)$  telle que  $\phi$  s'écrive en fonction d'un vecteur unitaire de  $\mathcal{H}_\phi$ .

Dans le cas où  $\mathcal{A}$  est une algèbre de von Neumann, on peut supposer de plus que les états sont normaux. Tout état  $\phi$  sur  $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$  peut alors s'écrire de la manière suivante : pour tout  $x$  dans  $\mathcal{A}$ ,

$$\phi(x) = \text{tr}(Ax),$$

où  $A$  est un opérateur positif de trace égale à 1 sur  $\mathcal{H}$ . Dans ce cas, on peut identifier les états du système aux opérateurs positifs de trace égale à 1.

Ces constatations montrent l'importance de la théorie spectrale des opérateurs. Cette étude sera l'objet du chapitre 3.

Nous allons introduire les notations de Dirac utilisées en mécanique quantique. Ces notations, devenues indispensables auprès des physiciens sont très pratiques pour effectuer des calculs. Nous nous appuyons sur le cours de Walter Appel [2].

Considérons un espace de Hilbert séparable noté  $\mathcal{H}$ . On notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire sur  $\mathcal{H}$  qui, selon l'usage des physiciens est linéaire en la 2<sup>e</sup> variable et antilinéaire en la 1<sup>ère</sup> variable. Définissons les kets de  $\mathcal{H}$  :

**Définition 2.10** Les vecteurs de l'espace  $\mathcal{H}$  sont appelés les kets de  $\mathcal{H}$ . Un élément  $\psi \in \mathcal{H}$  sera noté  $|\psi\rangle$ . Une fonction à valeurs dans  $\mathcal{H}$  sera notée  $t \mapsto |\psi(t)\rangle$ .

Un exemple d'espace de Hilbert important utilisé en mécanique quantique est  $L^2(\mathbb{R})$ . Une fonction  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  sera notée  $|\psi\rangle$ . Si cette fonction dépend du temps, on notera  $|\psi(t)\rangle$  la fonction  $x \mapsto \psi(x, t)$ .

Nous définissons les bras de  $\mathcal{H}$  les éléments du dual de  $\mathcal{H}$ .

**Définition 2.11** Les éléments du dual topologique de  $\mathcal{H}$  noté  $\mathcal{H}'$  sont appelés les bras de  $\mathcal{H}$ . Ils sont notés  $\langle\phi|$ . Le résultat de l'application d'un bra  $\langle\phi|$  sur un ket  $|\psi\rangle$  est noté  $\langle\phi|\psi\rangle$  qui est donc un bracket (qui signifie crochet en français).

Remarquons qu'à tout ket  $\phi \in \mathcal{H}$ , on peut associer la forme linéaire :

$$\omega_\phi : \mathcal{H} \ni |\psi\rangle \mapsto \langle\phi|, |\psi\rangle\rangle.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que  $\omega_\phi$  est continue. Elle correspond à un bra que l'on notera  $\langle\phi|$  :

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\phi|, |\psi\rangle\rangle.$$

On a ainsi montré qu'à tout ket  $|\phi\rangle$ , on peut associer un bra  $\langle\phi| \in \mathcal{H}'$ . Le théorème de représentation de Riesz montre que la réciproque est vraie. On a ainsi une correspondance bijective entre bras et kets. L'idée des notations de Dirac est de pouvoir travailler avec  $\mathcal{H}$  et de ne plus tenir compte de  $\mathcal{H}'$ . Ainsi  $\langle\phi|\psi\rangle$  devient une notation pour  $\langle\phi|, |\psi\rangle\rangle$ .

Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base hilbertienne de  $\mathcal{H}$ . On sait que cette famille est caractérisée par le fait que, pour tout  $\psi \in \mathcal{H}$ ,

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \langle\varphi_n, \psi\rangle \varphi_n.$$

Avec les notations de Dirac, cette égalité s'écrit, pour tout  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ,

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle\varphi_n|\psi\rangle |\varphi_n\rangle.$$

En notant le produit scalaire  $\langle\varphi_n|\psi\rangle$  après le vecteur  $|\varphi_n\rangle$ , pour tout  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ ,

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n|\psi\rangle.$$

De manière formelle, l'opérateur  $\sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n|$  est l'opérateur identité. On a la relation de fermeture suivante. Soit  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base hilbertienne :

$$I_{\mathcal{H}} = \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n|.$$

Avec cette écriture, on retrouve facilement l'identité de Parseval. Pour tout  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , on a :

$$\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = \left\langle \psi \left| \sum_{n=0}^{\infty} |\varphi_n\rangle \langle\varphi_n| \right| \psi \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle\psi|\varphi_n\rangle \langle\varphi_n|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle\varphi_n|\psi\rangle|^2.$$

Résumons certaines notations couramment utilisées dans le tableau suivant. Soit  $X$  un opérateur de  $B(\mathcal{H})$  diagonalisable,  $\lambda_i$  ses valeurs propres (non nécessairement distinctes) et  $u(\lambda_i)$  les vecteurs propres associés.

Notations usuelles	Notations de Dirac
Base orthonormale $(e_0, \dots, e_n)$	$( 0\rangle, \dots,  n\rangle)$
$\psi = \sum_{i=0}^n \psi_i e_i$ $Xu(e_i) = \lambda_i u(e_i)$	$ \psi\rangle = \sum_{i=0}^n \psi_i  i\rangle$ $X i\rangle = \lambda_i  i\rangle$
$P(\{u_i\})$ projection sur $\mathbb{C}u_i$	$ i\rangle\langle i $
$X = \sum_i \lambda_i P(\{u_i\})$	$X = \sum_i \lambda_i  i\rangle\langle i $

## 2.6 Introduction à la théorie quantique de l'information

Les progrès technologiques ont permis de diminuer la taille des transistors et le nombre de transistors dans les circuits intégrés augmentent de manière exponentielle. A un tel rythme la taille de transistors approchera celle de l'atome, on pourra se référer au graphe ci après (tiré de Wikipédia français) décrivant la loi de Moore. A l'échelle atomique, on ne pourra plus négliger les effets de la mécanique quantique sur les composants électroniques. Certains physiciens dont principalement Feynman ont eu l'idée d'utiliser les propriétés de la mécanique quantique pour créer un nouvel ordinateur. C'est ainsi que naquit la théorie quantique de l'information qui a pour but de construire un ordinateur reposant sur les propriétés de la mécanique quantique.

En 1994, Peter Shor met au point un algorithme qui permet de factoriser des grands nombres entiers en un temps polynomial à l'aide d'un ordinateur quantique. Cette découverte relance les recherches sur l'ordinateur quantique. En effet, ce dernier pourrait être en mesure de mettre en danger les systèmes de codage actuels qui utilisent le cryptage RSA.

Nous allons donner les concepts fondamentaux utilisés en théorie quantique de l'information : la notion de qubit, les portes quantiques logiques et l'intrication des états quantiques. On s'appuiera sur [59, 46, 62].

### 2.6.1 Qubit

En théorie classique de l'information, le bit est l'unité de base de l'information. En théorie quantique de l'information, nous allons introduire un concept analogue : le quantum bit ou qubit. Le qubit constitue l'unité de base de l'information quantique.

Le qubit est défini mathématiquement. Une définition mathématique abstraite du qubit a l'avantage d'être indépendante de la réalisation physique considérée. En effet, le qubit admet plusieurs réalisations physiques possibles (polarisation de photons, état d'excitation d'un électron ou d'un ion...).

**Définition 2.12** *Un qubit est un vecteur unitaire dans un espace vectoriel complexe  $\mathcal{H}$  de dimension 2.*

Notons  $|0\rangle, |1\rangle$  une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ . On sait qu'un bit classique peut admettre deux états 0 ou 1. Un qubit peut aussi avoir un de ces états  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ . La différence est qu'un qubit peut avoir un état autre que  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ , il peut s'écrire comme une combinaison linéaire de ces deux derniers :

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

où  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  et  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . On peut interpréter cette égalité à l'aide mécanique quantique. Le qubit  $|\psi\rangle$  a une probabilité  $|\alpha|^2$  d'être dans l'état  $|0\rangle$  et une probabilité  $|\beta|^2$  d'être dans l'état  $|1\rangle$ . Contrairement au cas classique, où on sait dans quel état se trouve un bit (0 ou 1), un qubit peut se trouver dans une superposition linéaire d'états.

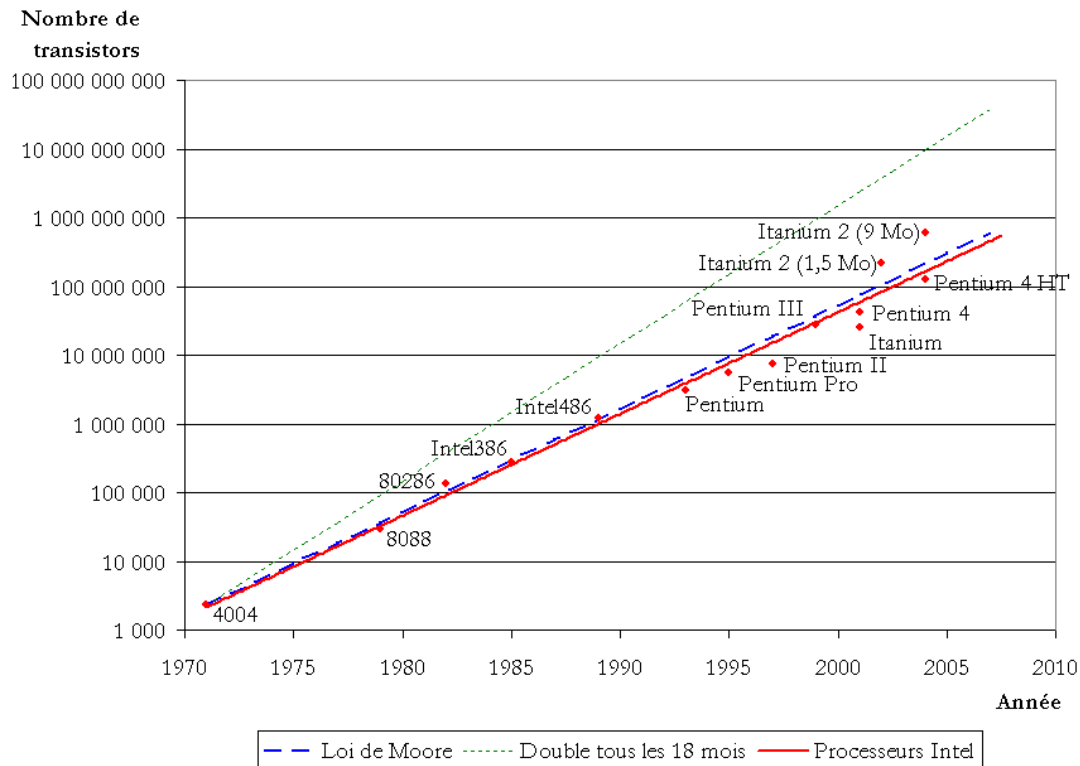
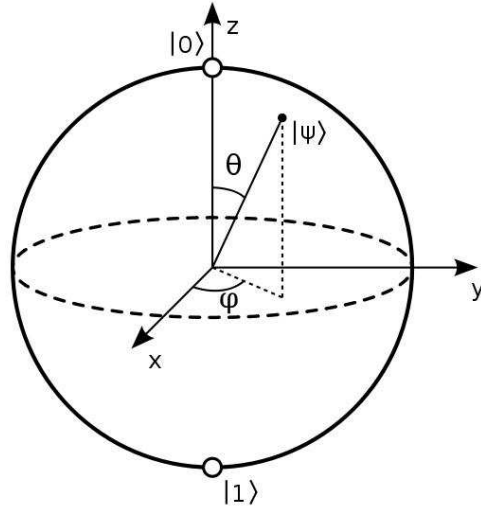


FIGURE 2.1 – Graphique (en ordonnées logarithmiques) illustrant la loi de Moore par rapport à l'évolution réelle du nombre de transistors dans les microprocesseurs Intel ; en pointillés verts au-dessus, représentation de l'hypothèse selon laquelle ce nombre doublerait tous les 18 mois.

On peut paramétrer un qubit dans la sphère de Bloch représentée ci-dessus en adoptant comme paramètres les angles  $\varphi$  et  $\theta$ . En effet, il suffit d'écrire tout qubit  $|\psi\rangle$  de cette manière :

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle.$$

La sphère de Bloch, muni de ce paramétrage est représenté dans la figure ci-dessous tiré de Wikipédia :



### 2.6.2 Qubits multiples

En théorie classique de l'information, si l'on possède deux bits classiques, on peut obtenir quatre états possibles : 00, 01, 10 et 11. Pour constituer un équivalent quantique, nous travaillons avec une paire de qubits. L'espace de cette paire de qubits sera :

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H},$$

et un état sur ce système sera représenté par le produit tensoriel de deux états de  $\mathcal{H}$  :  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  que l'on notera indifféremment :

$$|a\rangle \otimes |b\rangle = |a\rangle|b\rangle = |ab\rangle.$$

Un système constitué d'un couple de qubits peut donc s'écrire comme la superposition de quatre états :  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  et  $|11\rangle$  :

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle,$$

où  $\alpha_{00}, \alpha_{01}, \alpha_{10}, \alpha_{11} \in \mathbb{C}$  tels que  $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1$ . Les qubits multiples possèdent la même interprétation probabiliste que dans le paragraphe précédent.

### 2.6.3 Portes quantiques

Les circuits des ordinateurs classiques sont constitués de connections et de portes logiques. Les connections sont supposées faire circuler l'information à travers le circuit alors que les portes logiques agissent sur l'information. Nous donnons un bref aperçu de leurs équivalents quantiques. Considérons par exemple la porte logique NOT agissant sur un bit. La table de vérité de cette porte consiste à intervertir 0 et 1. Une porte quantique logique qui effectuerait cette même opération dans le cadre quantique intervertirait  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ . Ainsi la superposition d'états  $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$  deviendrait  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ . Une manière de réaliser la porte quantique NOT est de la définir par la matrice :

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En écrivant l'état quantique  $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$  dans la base  $(|0\rangle, |1\rangle)$  par le vecteur colonne :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

la porte quantique NOT agit linéairement :

$$\sigma_x \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

La contrainte que doit respecter une porte quantique agissant sur un seul qubit est la condition de normalisation : la porte quantique doit envoyer un qubit sur un qubit. Cette condition se traduit par le fait que la matrice  $A$  représentant la porte quantique est unitaire :

$$AA^* = A^*A = I_2.$$

Toute matrice unitaire  $2 \times 2$  représente une porte quantique. Donnons deux exemples de portes quantiques usuelles agissant sur un qubit. La porte  $\sigma_z$  ("bit flip") qui laisse invariant  $|0\rangle$ , mais échange  $|1\rangle$  en  $-|0\rangle$ .

$$\sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La porte de Hadamard qui envoie  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  sur  $\alpha \left( \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \beta \left( \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$  :

$$H := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant examiner les portes quantiques agissant sur des paires de qubits. Dans le cas classique, parmi les portes logiques agissant sur une paire de bits classiques, on trouve les AND, OR, XOR, NAND et NOR. Un résultat très important est le fait que la porte NAND est universelle : à partir de portes logiques NAND, on peut reconstituer n'importe quelles autres portes logiques.

Nous allons présenter la porte quantique "CNOT" (de l'anglais controlled-NOT). Cette porte logique a deux entrées : un qubit de contrôle et un qubit cible sur lequel on agit. Si le qubit de contrôle est  $|0\rangle$  alors le qubit cible reste inchangé. Si par contre le qubit de contrôle est  $|1\rangle$  alors le qubit cible est interverti :

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle, |01\rangle \rightarrow |01\rangle, |10\rangle \rightarrow |11\rangle, |11\rangle \rightarrow |10\rangle.$$

La matrice du CNOT dans la base  $(|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle)$  est :

$$U_{CN} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons présenté cette porte logique quantique en raison de son importance. En effet, on peut montrer que toute porte logique quantique peut s'écrire en fonction de la porte CNOT et de la porte NOT.

#### 2.6.4 Intrication d'états quantiques

Considérons  $n$  systèmes quantiques numérotés de 1 à  $n$  dont les espaces des états sont respectivement les espaces de Hilbert  $\mathcal{H}_i$ . D'après l'axiome 2.9 de la mécanique quantique, l'espace d'état du système composé est donc le produit tensoriel :

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_n.$$

Supposons que le système  $i$  soit dans l'état  $\psi_i$ , alors le système composé est dans l'état :

$$|\psi\rangle := |\psi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle.$$

Considérons l'état quantique suivant :

$$|\phi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

L'état  $|\phi\rangle$  a la remarquable propriété suivante, il n'existe pas d'états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  tels que  $|\phi\rangle = |a\rangle|b\rangle$ . On dit que l'état  $|\phi\rangle$  est intriqué. L'intrication qui n'a pas de contrepartie classique, joue un rôle fondamental en mécanique quantique. Nous verrons qu'elle intervient dans des protocoles de communication et des algorithmes quantiques comme la téléportation quantique ou le codage superdense.

## 2.7 Pas de duplication possible

Nous allons voir que les axiomes de la mécanique quantique conduisent à des impossibilités en mécanique quantique. L'une d'elles est l'impossibilité de dupliquer un état donné d'un système.

Peut-on copier un état quantique ? Étonnamment en mécanique quantique, il n'est pas possible de dupliquer un état quantique. Donnons une preuve de ce fait.

Supposons que l'on ait une machine quantique qui permette d'effectuer cette opération de copie. On suppose que cette machine possède deux entrées et deux sorties. A la première entrée, on "injecte" l'état  $|\psi\rangle$  que l'on veut copier et dans l'autre entrée arrive un état pur  $|s\rangle$  qui va être transformé. Aux deux sorties, nous obtenons les deux états  $|\psi\rangle$  qui résultent de l'opération de duplication. En résumé, il existe une évolution unitaire  $U$  qui effectue :

$$|\psi\rangle \otimes |s\rangle \xrightarrow{U} U(|\psi\rangle \otimes |s\rangle) = |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle.$$

Supposons désormais que l'opération de copie fonctionne pour deux états purs  $|\psi\rangle$  et  $|\phi\rangle$ . On a donc :

$$\begin{aligned} U(|\psi\rangle \otimes |s\rangle) &= |\psi\rangle \otimes |\psi\rangle, \\ U(|\phi\rangle \otimes |s\rangle) &= |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle, \end{aligned}$$

En effectuant le produit scalaire de la première ligne par la seconde, on obtient :

$$\langle\psi, \phi\rangle = \langle\psi, \phi\rangle^2.$$

Ceci implique donc  $\langle\psi, \phi\rangle = 0$  ou  $\langle\psi, \phi\rangle = 1$ . Ce qui est équivalent à dire que  $|\psi\rangle$  et  $|\phi\rangle$  sont orthogonaux ou bien que  $|\psi\rangle = |\phi\rangle$ . Une machine à dupliquer les états quantiques ne peut donc copier que des états orthogonaux entre eux. Ceci montre qu'une machine à dupliquer les états quantique est impossible à réaliser.

## 2.8 Nouvelles possibilités quantiques

Nous avons vu l'impossibilité de dupliquer un état quantique. Ceci aurait pu être vu comme un désavantage de l'ordinateur quantique par rapport à l'ordinateur classique. Néanmoins, la mécanique quantique offre des possibilités surprenantes comme le phénomène de téléportation et le codage superdense, dont nous allons décrire les protocoles. On se référera à [62].

### 2.8.1 Téléportation

Le processus de téléportation a été mis au point en 1993 par Bennett, Wootters, Peres et d'autres dans [11].

Notons  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ . Alice dispose d'un qubit à l'état :

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle,$$

avec  $a, b \in \mathbb{C}$  et  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ . Elle voudrait transmettre ce qubit à Bob à travers un canal classique. Supposons qu'au début du protocole, Alice et Bob se partagent une paire intriquée :

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle).$$

On peut imaginer qu'une troisième personne ait préparé deux photons dans l'état de polarisation  $|\phi\rangle$  et elle ait ensuite envoyé le premier photon à Alice et le second à Bob. Même séparés, les deux photons continuent à être dans l'état intriqué. Ainsi, on doit considérer l'état global  $|\phi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , où  $\mathcal{H}_A$  et  $\mathcal{H}_B$  sont deux espaces de Hilbert isomorphes à  $\mathcal{H}$ . Alice contrôle les degrés de liberté associés à  $\mathcal{H}_A$ , tandis que Bob contrôle ceux de  $\mathcal{H}_B$ . En d'autres termes, si  $X$  représente un opérateur correspondant à une porte logique unitaire ou à une observable autoadjointe, si c'est Alice qui opère, elle agit avec  $X \otimes I$  sur  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , si c'est Bob qui opère, il agit avec  $I \otimes X$  sur  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ .

Alice applique l'algorithme suivant :

**Algorithme 2.13** *Algorithme 1 : Téléportation (coté Alice)*

1. **Requiert :**
  - Porte de Hadamard  $H$  et porte CNOT  $U_{CN}$ ,
  - État à transmettre :  $|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ ,
  - Paire intriquée :  $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ .
2. **Retourne** un entier  $i \in \{0 \dots 3\}$ 
  - **Construire**  $|\chi_1\rangle := |\Psi\rangle \otimes |\phi\rangle \in (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A) \otimes \mathcal{H}_B$ .
  - **Agir**  $|\chi_2\rangle := (H \otimes I \otimes I)(U_{CN} \otimes I)|\chi_1\rangle$ .
  - **Choisir** un des opérateurs  $(P_i)_{0 \leq i \leq 3}$  où

$$P_0 = |00\rangle\langle 00|, P_1 = |01\rangle\langle 01|, P_2 = |10\rangle\langle 10|, P_3 = |11\rangle\langle 11|.$$

- **Mesurer**  $\mathbb{E}_{|\chi_2\rangle}(P_i \otimes I)$ . Le nouvel état normalisé après mesure est  $|\xi\rangle \in (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A) \otimes \mathcal{H}_B$ .
- **Transmettre** à Bob par un canal classique le  $i$  choisi.

Bob partage avec Alice l'état  $|\xi\rangle \in (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A) \otimes \mathcal{H}_B$  construit au cours de l'algorithme précédent et applique de son coté l'algorithme suivant :

**Algorithme 2.14** *Algorithme 2 : Téléportation (coté Bob)*

1. **Requiert :**
  - Les portes de Pauli  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ,
  - Le choix  $i \in \{0, \dots, 3\}$  d'Alice,
  - L'état  $|\xi\rangle \in (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_A) \otimes \mathcal{H}_B$ .
2. **Retourne**  $|\psi\rangle$ 
  - **Définir**  $X_0 = I \otimes I \otimes I, X_1 = I \otimes I \otimes \sigma_x, X_2 = I \otimes I \otimes \sigma_y, X_3 = I \otimes I \otimes \sigma_z$ .
  - **Agir**  $|\xi_i\rangle = X_i|\xi\rangle$ .



– **Isoler** le dernier qubit  $|\xi_i\rangle$ .

Prouvons que l'algorithme fonctionne en donnant les qubits intervenant durant le protocole.

$$\begin{aligned} |\chi_1\rangle &:= |\Psi\rangle \otimes |\phi\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a|000\rangle + a|011\rangle + b|100\rangle + b|111\rangle), \\ |\chi_2\rangle &:= (H \otimes I \otimes I)(U_{CN} \otimes I)|\chi_1\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a|000\rangle + a|100\rangle + a|011\rangle + a|111\rangle + b|010\rangle + b|110\rangle + b|001\rangle + b|101\rangle) \end{aligned}$$

Résumons dans un tableau les valeurs possibles de  $|\xi_i\rangle$ .

$i$	$ \xi\rangle = \frac{(P_i \otimes I) \chi_2\rangle}{\ (P_i \otimes I) \chi_2\rangle\ }$	$ \xi_i\rangle = X_i \xi\rangle$
0	$a 000\rangle + b 001\rangle$	$a 000\rangle + b 001\rangle =  00\rangle \otimes  \psi\rangle$
1	$a 011\rangle + b 010\rangle$	$a 010\rangle + b 011\rangle =  01\rangle \otimes  \psi\rangle$
2	$a 100\rangle - b 101\rangle$	$a 100\rangle + b 101\rangle =  10\rangle \otimes  \psi\rangle$
3	$a 111\rangle + b 110\rangle$	$ia 110\rangle + ib 111\rangle = i 11\rangle \otimes  \psi\rangle$

- Remarque 2.15** 1. À la fin du protocole, Bob dispose du même état que celui que possédait Alice initialement. Cependant, il ne s'agit pas d'une copie (ce qui contredirait le théorème de non duplication), mais d'une destruction d'information chez Alice et d'une création de la même information chez Bob
2. Le terme téléportation provient du fait qu'aucun transfert de matière ou d'énergie n'a eu lieu. La particule d'Alice n'a pas été physiquement déplacée vers Bob, seul l'état a été transféré.
3. On pourrait croire que l'on a affaire à une communication dont la vitesse dépasserait la vitesse de la lumière. Mais il ne faut pas oublier que qu'Alice et Bob utilisent un canal classique.

## 2.8.2 Codage superdense

Le codage superdense est une application surprenante à la théorie quantique de l'information des axiomes de la mécanique quantique. Supposons qu'Alice et Bob soient éloignés l'un de l'autre. Tous deux voudraient communiquer de l'information classique en utilisant de l'information quantique. Alice possède deux bits classiques qu'elle aimerait envoyer à Bob. Mais elle ne possède qu'un qubit. Peut-elle tout de même accomplir cette tâche ? Le protocole du codage superdense nous dit qu'il est possible de réaliser cette opération.

Notons  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ . Définissons :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, U_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U_2 = i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

On définit alors pour  $m \in \{0, \leq i \leq, 3\}$ ,  $|\psi_m\rangle = U_m|\psi\rangle$ , les projections  $P_m = |\psi_m\rangle\langle\psi_m|$  et  $M = \sum_{m=0}^3 2^m P_m$ .

Au début du protocole, Alice et Bob se partagent une paire intriquée  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  :

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

Alice veut transmettre deux bits classiques, codés par un entier  $m \in \{0, \leq i \leq, 3\}$  (la paire de bits est 00, 01, 10 ou 11).

**Algorithme 2.16** (coté Alice)

1. **Requiert :**
  - L’entier  $m \in \{0 \leq i \leq 3\}$  correspondant aux deux bits classiques à envoyer.
  - L’état  $|\psi\rangle$ .
2. **Retourne** un état :  $|\psi_m\rangle$ .  
On applique l’opérateur  $(U_m \otimes I)$  si on veut transmettre  $m$  :

$$|\psi_m\rangle := (U_m \otimes I)|\psi\rangle.$$

Un calcul permet de donner les valeurs possibles de  $|\psi_m\rangle$  :

$m$	$ \psi_m\rangle := (U_m \otimes I) \psi\rangle$
0	$ \psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle +  11\rangle)$
1	$ \psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 10\rangle +  01\rangle)$
2	$ \psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 10\rangle -  01\rangle)$
3	$ \psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle -  11\rangle)$

Alice transmet à Bob l’état  $|\psi_m\rangle$ , qui applique l’algorithme suivant :

**Algorithme 2.17** (coté Bob)

1. **Requiert :**
  - L’état  $|\psi_m\rangle$ ,
  - Une mesure de l’observable  $M$ .
2. **Retourne** une valeur numérique :  $2^m$   
Effectue la mesure de l’observable  $M$  dans  $|\psi_m\rangle$ .

On obtient le tableau suivant :

$m$	$P_0 \psi_m\rangle$	$P_1 \psi_m\rangle$	$P_2 \psi_m\rangle$	$P_3 \psi_m\rangle$
0	$ \psi_0\rangle$	0	0	0
1	0	$ \psi_1\rangle$	0	0
2	0	0	$ \psi_2\rangle$	0
3	0	0	0	$ \psi_3\rangle$

On en déduit donc que pour tout  $m \in \{0 \leq i \leq 3\}$  :

$$M|\psi_m\rangle = 2^m|\psi_m\rangle.$$

Le vecteur  $|\psi_m\rangle$  est un vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre  $2^m$ . En mesurant  $M$  dans cet état, on obtient  $2^m$  avec probabilité 1. En d’autres termes, si  $\mathcal{O}_M$  est l’observable associé à l’opérateur  $M$ , on a pour tout  $m \in \{0 \leq i \leq 3\}$  :

$$\mathbb{P}_{|\psi_m\rangle}[\mathcal{O}_M = 2^m] = 1.$$

Ainsi, Bob détermine avec certitude la valeur  $m$ .



## Chapitre 3

# Éléments de la théorie des opérateurs

Le but de ce chapitre est de donner des éléments de la théorie des opérateurs qui vont permettre de mieux comprendre les notions ou les résultats invoqués dans les chapitres 6, 7, 8 et 9. Nous donnerons tout d'abord un exemple important de  $C^*$ -algèbres, les algèbres de Cuntz. L'étude de ces dernières permet de mieux comprendre le théorème de dilatation isométrique minimale dû à Popescu. En second lieu, nous donnons des critères pour que des opérateurs denses soient unitairement équivalents. Puis nous allons étudier les différentes topologies sur  $B(\mathcal{H})$ , les états de  $B(\mathcal{H})$  et les algèbres fortement compactes. Enfin, nous donnons quelques propriétés des algèbres de von Neumann telles que le théorème de Sakai et la construction du produit croisé.

### 3.1 Algèbres de Cuntz et dilatation

Les algèbres de Cuntz constituent l'un des premiers exemples de  $C^*$ -algèbres simples et séparables. Elles ont été introduites par Cuntz en 1977 dans [22]. Les algèbres de Cuntz ont des applications en analyse harmonique, notamment dans la théorie des ondelettes (on pourra se référer aux travaux dans [16, 37, 14]). L'étude des algèbres de Cuntz permet de mieux comprendre l'intérêt du théorème de dilatation isométrique minimale prouvé par Popescu [64].

Soit  $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ,  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. Une famille  $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$  d'opérateurs vérifie les relations de Cuntz si :

1. les  $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont des isométries :  $\forall 1 \leq i \leq n, s_i^* s_i = I_{\mathcal{H}}$ ,
2.  $\sum_{i=1}^{+\infty} s_i s_i^* = I_{\mathcal{H}}$ .

Notons  $\mathcal{O}_n$  la  $C^*$ -algèbre engendrée par la famille  $(s_i)_{1 \leq i \leq n}$  :

$$\mathcal{O}_n := C^*(s_1, \dots, s_n).$$

Cuntz [22] a montré que  $\mathcal{O}_n$  est simple. De plus  $\mathcal{O}_n$  est unique en tant que  $C^*$ -algèbre à isomorphisme près au sens suivant :

**Théorème 3.1** [22] *Si  $(\tilde{s}_i)_{1 \leq i \leq n}$  une seconde famille d'isométries vérifiant  $\sum_{i=1}^{+\infty} \tilde{s}_i \tilde{s}_i^* = I_{\mathcal{H}}$  alors  $C^*(\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n)$  est canoniquement isomorphe à  $C^*(s_1, \dots, s_n)$  i.e l'application  $\tilde{s}_i \rightarrow s_i$  s'étend en un isomorphisme de  $C^*(\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n)$  dans  $C^*(s_1, \dots, s_n)$ .*

Soit  $\mathcal{K}$  un espace de Hilbert. Considérons une suite d'opérateurs  $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $B(\mathcal{K})$  telle que  $\sum_{i=1}^n T_i T_i^* = I_{\mathcal{K}}$ . Est-il possible de faire en sorte que la suite  $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$  vérifie la seconde relation de Cuntz pour tout  $i, j \in \{1 \dots n\}$ ,

$$T_j^* T_i = \delta_{ij} I_{\mathcal{K}}?$$

On peut répondre affirmativement à cette question, si l'on se permet d'agrandir l'espace de Hilbert  $\mathcal{K}$  et de prolonger les opérateurs  $(T_i^*)_{1 \leq i \leq n}$  sur ce dernier. Il existe un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  contenant  $\mathcal{K}$  tel que les  $T_i^*$  se prolongent en des opérateurs  $V_i^*$  sur  $\mathcal{H}$  et tels que :

$$V_j^* V_i = \delta_{ij} I_{\mathcal{H}}.$$

Cette construction est donnée par le théorème de dilatation minimale dû à Popescu [64] en 1989. Nous donnons les résultats de cette construction :

Soit  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . On notera dans ce paragraphe  $\Lambda$  l'ensemble  $\{1, 2, \dots, k\}$  où  $k \in \mathbb{N}$  et  $\Lambda = \mathbb{N}^*$  si  $k = \infty$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on notera  $F(n, \Lambda)$  l'ensemble des fonctions de  $\{1, 2, \dots, n\}$  à valeurs dans  $\Lambda$  et  $\mathcal{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} F(n, \Lambda)$  avec  $F(0, \Lambda) = \{0\}$ . Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  une suite d'isométries sur  $\mathcal{H}$ . Soit  $f \in F(n, \Lambda)$ , on définit

$$V_f := V_{f(1)} V_{f(2)} \dots V_{f(n)} \text{ et } V_0 = I_{\mathcal{H}}.$$

**Définition 3.2** Soit  $\mathcal{T} = \{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  une suite de contractions sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  telle que  $\sum_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda T_\lambda^* \leq I_{\mathcal{H}}$ . Soit  $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  une suite d'isométries sur un espace de Hilbert  $\mathcal{K}$  contenant  $\mathcal{H}$ . On dit que  $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  est une dilatation isométrique minimale si :

1.  $\sum_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda V_\lambda^* \leq I_{\mathcal{K}}$ ,
2. pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\mathcal{H}$  est stable par tous les  $V_\lambda^*$  et  $V_\lambda^*|_{\mathcal{H}} = T_\lambda^*$ .
3.  $\mathcal{K} = \bigvee_{f \in \mathcal{F}} V_f \mathcal{H}$ .

**Théorème 3.3** [64] Soit  $\mathcal{T} = \{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  une suite d'opérateurs sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  telle que  $\sum_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda T_\lambda^* \leq I_{\mathcal{H}}$ . Alors  $\mathcal{T}$  admet une dilatation isométrique minimale  $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{K}$  contenant  $\mathcal{H}$ . La dilatation est unique à un isomorphisme près.

**Théorème 3.4 (de dilatation isométrique minimale)** [64] Soit  $\mathcal{T} = \{T_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  une suite d'opérateurs sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  telle que  $\sum_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda T_\lambda^* \leq I_{\mathcal{H}}$ . Soit  $\mathcal{V} = \{V_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  la dilatation isométrique minimale de  $\mathcal{T}$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{K}$  contenant  $\mathcal{H}$ ,  $\sum_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda V_\lambda^* = I_{\mathcal{K}}$  si et seulement si,  $\sum_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda T_\lambda^* = I_{\mathcal{H}}$ .

## 3.2 Equivalence unitaire entre opérateurs normaux compacts

Nous donnons dans ce paragraphe des critères d'équivalence unitaires entre opérateurs compacts et entre opérateurs positifs à trace intervenant au chapitre 8.

**Définition 3.5** Soit  $A$  et  $B$  deux opérateurs bornés de  $B(\mathcal{H})$ , on dit que  $A$  et  $B$  sont unitairement équivalents s'il existe un opérateur unitaire  $U \in B(\mathcal{H})$  tel que  $UAU^* = B$ .

**Définition 3.6** Soit  $T$  un opérateur compact. On définit la fonction de multiplicité de  $T$  comme étant

$$m_T : \mathbb{C} \ni \lambda \rightarrow m_T(\lambda) := \dim(\ker(T - \lambda I)).$$

Remarquons que pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $m_T(\lambda) \geq 0$  et que  $m_T(\lambda) > 0$  si et seulement si,  $\lambda$  est une valeur propre pour  $T$ . De plus  $m_T(\lambda) \leq \infty$  si  $\lambda \neq 0$ .

**Théorème 3.7** [21] Deux opérateurs compacts normaux sont unitairement équivalents, si et seulement si, ils ont la même fonction de multiplicité.

Notons  $B_1(\mathcal{H})$  l'ensemble des opérateurs à trace. Donnons la définition d'un opérateur densité :

**Définition 3.8** *On appelle opérateur densité, tout opérateur de  $B_1(\mathcal{H})$  qui est positif et dont la trace vaut 1.*

Considérons le cas où  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs densité sur  $\mathcal{H}$ . On peut alors définir les moments d'un opérateur densité.

**Définition 3.9** *Soit  $A$  un opérateur densité, on appelle moments de  $A$  la suite des traces de  $(A^n)_{n \geq 1}$  :*

$$m_n(A) := \text{tr}(A^n).$$

On remarque que pour tout  $n \geq 1$ ,  $m_n(A) \leq 1$ . On peut caractériser l'équivalence unitaire de deux opérateurs densité à l'aide des moments. Nous allons d'abord exposer la preuve dans le cas où  $\mathcal{H}$  est de dimension finie puis en dimension quelconque.

**Théorème 3.10** *Soient  $A, B \in M_p(\mathbb{C})$ . Les matrices  $A$  et  $B$  sont unitairement équivalentes si et seulement si  $A$  et  $B$  ont les mêmes moments.*

*Preuve:* Soit  $\chi_A$  et  $\chi_B$  les polynômes caractéristiques respectifs de  $A$  et  $B$ . Notons  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  les racines en tenant compte de leur multiplicité de  $\chi_A$  et  $\beta_1 \dots \beta_n$  celles de  $\chi_B$ . Remarquons que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\text{tr}(A^n) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^n$$

est le  $n$ -ième polynôme de Newton dont les indéterminées sont  $\alpha_1 \dots \alpha_n$ . L'égalité des moments de  $A$  et  $B$  implique l'égalité des polynômes de Newton. Or les coefficients de  $\chi_A$  sont des polynômes symétriques en les  $\alpha_1 \dots \alpha_n$ . De même, les coefficients de  $\chi_B$  sont des polynômes symétriques en les  $\beta_1 \dots \beta_n$ . Comme tout polynôme symétrique est un polynôme en les polynômes de Newton associés, on en déduit que les coefficients de  $\chi_A$  et de  $\chi_B$  sont les mêmes, et donc que  $\chi_A = \chi_B$ . Les matrices  $A$  et  $B$  ont donc les mêmes racines avec les mêmes ordres de multiplicité. Ainsi  $A$  et  $B$  sont donc unitairement équivalentes.  $\square$

**Théorème 3.11** *Soient  $A, B \in B(\mathcal{H})$  deux opérateurs densité, les opérateurs  $A$  et  $B$  sont unitairement équivalents si et seulement si  $A$  et  $B$  ont les mêmes moments.*

*Preuve:* L'un des sens de l'équivalence est triviale. Considérons les décompositions spectrales des deux opérateurs compacts  $A$  et  $B$  :

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k p_k \quad \text{et} \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k q_k,$$

où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_k, \mu_k \in ]0, 1]$  et  $\lambda_k \geq \lambda_{k+1}$  et  $\mu_k \geq \mu_{k+1}$ . On a donc pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^m = \text{tr}(A^m) = \text{tr}(B^m) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^m.$$

Définissons deux mesures positives sur  $[0, 1]$  par :

$$\lambda := \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \delta_{\lambda_k} \quad \text{et} \quad \mu := \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \delta_{\mu_k},$$

où  $\delta_x$  est la mesure de Dirac en  $x$ . Les mesures  $\lambda$  et  $\mu$  sont ainsi à support compact et ont les mêmes moments car pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} x^m d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{m+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^{m+1} = \int_{\mathbb{R}} x^m d\mu(x).$$

Donc  $\lambda$  et  $\mu$  ont la même loi et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\lambda_k = \mu_k.$$

Ainsi  $A$  et  $B$  ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités : ils sont donc unitairement équivalents.  $\square$

### 3.3 Topologies sur $B(\mathcal{H})$

Lorsque l'on travaille avec des opérateurs de  $B(\mathcal{H})$  et que  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert de dimension infinie, on a le choix entre plusieurs topologies. L'introduction de ces topologies permet d'obtenir des résultats de compacité qui ne sont pas valables si l'on travaille avec la topologie uniforme. Dans ce paragraphe nous rappelons les différentes topologies qui interviennent, les liens entre elles et des résultats de compacité utiles.

Rappelons tout d'abord la **topologie de la convergence uniforme** sur  $B(\mathcal{H})$  définie par la norme :

$$X \mapsto \|X\|_{\infty} := \sup_{h \in \mathcal{H} - \{0\}} \frac{\|Xh\|}{\|h\|}.$$

La **topologie forte** est définie par les semi-normes :

$$s_{\xi}(X) := \|X\xi\|,$$

où  $\xi \in \mathcal{H}$ , on indique cette topologie en abrégé par "SOT" (pour "strong operator topology").

La **topologie faible** est définie par les semi-normes :

$$s_{\xi_1, \xi_2}(X) := |\langle X\xi_1, \xi_2 \rangle|,$$

où  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}$ . On indique la topologie faible par "WOT" (pour "weak operator topology").

Donnons quelques liens entre la topologie forte et la topologie faible sur  $B(\mathcal{H})$ . La topologie faible comme son nom l'indique est plus faible que la topologie forte. La topologie forte est plus faible que la topologie uniforme.

**Remarque 3.12** 1. L'adjonction  $B(\mathcal{H}) \ni X \rightarrow X^* \in B(\mathcal{H})$  est continue pour la topologie faible

2. L'adjonction n'est pas continue pour la topologie forte. En effet, soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base orthonormale de  $\mathcal{H}$  fixée. Considérons le shift unilatéral  $S$  défini par :

$$S(e_n) = e_{n+1},$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . L'adjoint  $S^*$  de  $S$  est alors donné par :  $\forall n \geq 1, S^*(e_n) = e_{n-1}$  et  $S^*(e_0) = 0$ . On remarque que

$$(S^*)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{SOT} 0.$$

mais la suite  $(S^n)$  vérifie pour tout  $\xi \in \mathcal{H}$ ,  $\|S^n(\xi)\| = \|\xi\|$  et donc  $(S^n)$  ne converge pas vers 0 dans la topologie forte.

Pour pallier à la non continuité de l'adjoint, on introduit la **topologie \* forte**, définie par les semi-normes :

$$s_\xi(X) := \|X\xi\| + \|X^*\xi\|,$$

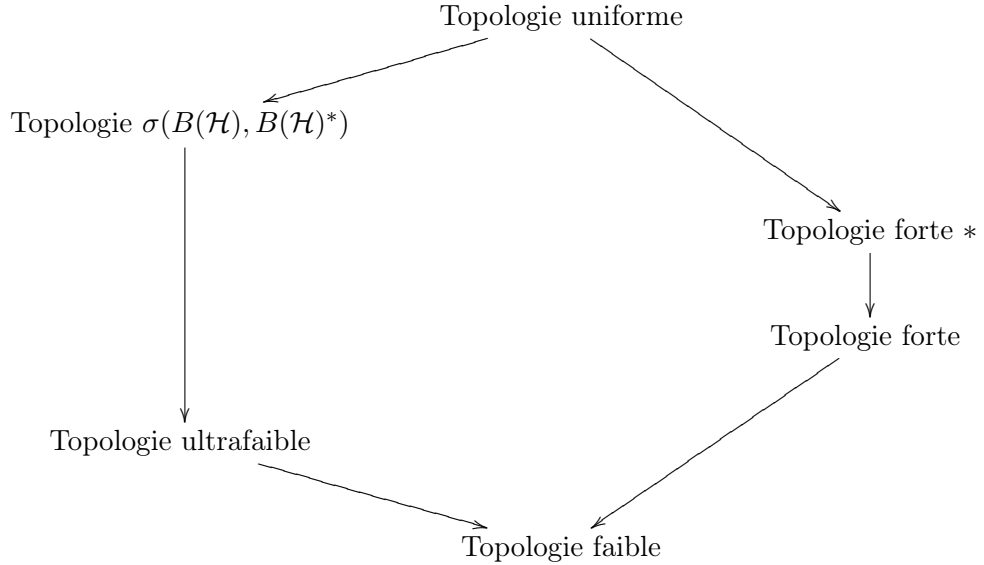
où  $\xi \in \mathcal{H}$ . L'adjonction est ainsi continue pour la topologie \* forte.

Nous introduisons enfin deux topologies liées à la théorie des espaces de Banach. Rappelons que  $B(\mathcal{H})$  est le dual de  $B_1(\mathcal{H})$  ; on peut définir alors la **topologie \* faible** sur  $B(\mathcal{H})$  donnée par les semi-normes :

$$B(\mathcal{H}) \ni X \mapsto n_A(X) := |\operatorname{tr}(AX)|,$$

où  $A \in B_1(\mathcal{H})$ . Cette topologie est notée  $\sigma(B(\mathcal{H}), B_1(\mathcal{H}))$ . Elle est parfois appelée **topologie ultrafaible** ou **topologie  $\sigma$ -faible**.

Nous avons enfin la topologie faible  $\sigma(B(\mathcal{H}), B(\mathcal{H})^*)$ . Nous mentionnons seulement cette topologie, elle ne nous servira pas dans la suite. Voici un diagramme résumant les liens entre les différentes topologies



Lorsque l'espace  $\mathcal{H}$  est séparable, les topologies forte et faible induites sur un sous ensemble borné de  $B(\mathcal{H})$  sont métrisables. Soit  $(h_n)$  un sous ensemble dénombrable dense dans  $\operatorname{ball}(\mathcal{H})$ . Pour tout  $A, B \in B(\mathcal{H})$ , définissons les distances sur  $B(\mathcal{H})$  :

$$d_s(A, B) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \|(A - B)h_n\|,$$

$$d_w(A, B) = \sum_{m,n=1}^{+\infty} 2^{-n-m} |((A - B)h_n | h_m)|.$$

Les distances  $d_s$  et  $d_w$  définissent des topologies qui coïncident respectivement avec les topologies SOT et WOT sur les sous-ensembles bornés de  $B(\mathcal{H})$ .

**Proposition 3.13** *Soit  $(W_n), (S_n)$  deux suites de  $B(\mathcal{H})$  et  $W, S$  deux éléments de  $B(\mathcal{H})$ . On suppose que  $(W_n)$  est uniformément bornée.*

1. Si  $W_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{WOT} W$  et  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{SOT} S$ , alors  $W_n S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{WOT} WS$ .



2. Si  $W_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{SOT} W$  et  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{SOT} S$ , alors  $W_n S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{SOT} WS$ .

*Preuve:* On remarque que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$W_n S_n - WS = W_n(S_n - S) + (W_n - W)S.$$

Démontrons, pour tout  $u, v \in \mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} |\langle (W_n S_n - WS)u | v \rangle| &= |\langle W_n(S_n - S)u | v \rangle| + |\langle (W_n - W)Su | v \rangle| \\ &= |\langle (S_n - S)u | W_n^* v \rangle| + |\langle (W_n - W)Su | v \rangle| \\ &\leq \|(S_n - S)u\| \|W_n^*\| \|v\| + |\langle (W_n - W)Su | v \rangle|. \end{aligned}$$

Comme  $\|W_n^*\| = \|W_n\|$  est uniformément borné, le membre de droite tend vers 0. Ceci montre que  $W_n S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{WOT} WS$ .

Démontrons, pour tout  $u \in \mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} \|(W_n S_n - WS)u\| &= \|W_n(S_n - S)u + (W_n - W)Su\| \\ &\leq \|W_n(S_n - S)u\| + \|(W_n - W)Su\| \\ &\leq \|W_n\| \|(S_n - S)u\| + \|(W_n - W)Su\|. \end{aligned}$$

Comme  $\|W_n\|$  est uniformément borné, le membre de droite tend à nouveau vers 0. Ceci montre que  $W_n S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{SOT} WS$ .  $\square$

En dimension finie, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass tout sous ensemble borné et fermé d'un espace vectoriel normé est compact. Malheureusement, dans le cas où  $\mathcal{H}$  est de dimension infinie, ce résultat n'est plus valable pour la topologie induite par la norme uniforme. Le théorème de Riesz caractérise d'ailleurs les espaces vectoriels normés de dimension finie comme étant ceux qui possèdent une boule unité fermée compacte. Néanmoins si l'on muni l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de la topologie faible  $\sigma(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$ , la réflexivité de  $\mathcal{H}$  et le théorème de Banach-Alaoglu assure que la boule unité fermée de  $\mathcal{H}$  est compacte pour la topologie faible  $\sigma(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$ . Donnons quelques résultats :

**Proposition 3.14** [21] *La boule unité fermée de  $B(\mathcal{H})$  notée*

$$\text{ball}(B(\mathcal{H})) := \{T \in B(\mathcal{H}) \mid \|T\| \leq 1\},$$

*est compacte pour la topologie faible (WOT). Si  $\mathcal{H}$  est séparable, alors la boule unité fermée de  $B(\mathcal{H})$ ,  $\text{ball}(B(\mathcal{H}))$ , est un espace métrique compact pour la topologie  $\sigma$ -faible.*

Examinons quelques propriétés de la topologie  $*$ -faible et son lien avec la topologie faible sur  $B(\mathcal{H})$ .

**Proposition 3.15** [21]

1. *La topologie faible et la topologie  $\sigma$ -faible coïncident sur les ensembles bornés de  $B(\mathcal{H})$ .*
2. *Une suite de  $B(\mathcal{H})$  converge dans la topologie faible, si et seulement si elle converge dans la topologie  $\sigma$ -faible.*

### 3.4 Étude des états sur $B(\mathcal{H})$

Si  $\mathcal{H}$  est l'espace de Hilbert d'un système quantique, les états sur  $B(\mathcal{H})$  correspondent aux états quantiques du système. Il est donc important de connaître les propriétés des états de  $B(\mathcal{H})$ . Dans ce paragraphe, nous verrons que tout état de  $B(\mathcal{H})$  se décompose de manière unique comme combinaison convexe d'un état normal et d'un état singulier. Nous donnerons d'une part les propriétés de convergence d'une suite d'états normaux et préciserons d'autre part les états dits singuliers.

#### 3.4.1 Décomposition d'un état de $B(\mathcal{H})$

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable. Nous commençons par définir les états normaux et les états singuliers de  $B(\mathcal{H})$ .

**Définition 3.16** *Une forme linéaire positive  $\psi$  de  $B(\mathcal{H})$  est dite normale si pour toute suite  $(A_j)$  de  $B(\mathcal{H})$  convergeant fortement vers  $A$  en croissant, la suite  $\psi(A_j)$  converge vers  $\psi(A)$ . Si de plus  $\psi(I_{\mathcal{H}}) = 1$ , on dit que  $\psi$  est un état normal de  $B(\mathcal{H})$ .*

**Définition 3.17** *Soit  $\phi$  une forme linéaire positive continue de  $B(\mathcal{H})$ , on dit que  $\phi$  est singulière s'il n'existe pas de forme linéaire positive normale  $\psi$  sur  $B(\mathcal{H})$  non nulle telle que :*

$$0 < \psi \leq \phi.$$

*Si de plus  $\phi(I_{\mathcal{H}}) = 1$ , on dit que  $\phi$  est un état singulier*

Donnons le théorème de décomposition d'un état de  $B(\mathcal{H})$  démontré par Takesaki et Nakamura.

**Théorème 3.18** [52, 55] *Soit  $\psi$  un état sur  $B(\mathcal{H})$ , alors il existe deux états  $\psi_n$  et  $\psi_s$  sur  $B(\mathcal{H})$  où  $\psi_n$  est un état normal sur  $B(\mathcal{H})$  et  $\psi_s$  est un état singulier sur  $B(\mathcal{H})$  tels que :*

$$\psi = \alpha\psi_n + (1 - \alpha)\psi_s,$$

où  $\alpha \in [0, 1]$ . Cette décomposition est unique.

#### 3.4.2 États normaux

Nous allons donc étudier les états normaux et les états singuliers de  $B(\mathcal{H})$ . Les états normaux de  $B(\mathcal{H})$  nous permettent de travailler avec les opérateurs densités. En effet on peut caractériser les formes linéaires normales :

**Théorème 3.19** [21] *Soit  $\psi$  une forme linéaire positive sur  $B(\mathcal{H})$ , les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1.  $\psi$  est normale.
2. Si  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de projections deux à deux orthogonales  $B(\mathcal{H})$  alors

$$\psi \left( \sum_{n=0}^{+\infty} E_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \psi(E_n).$$

3.  $\psi$  est continue pour la topologie  $*$ -faible.
4. Il existe un unique opérateur positif à trace  $\rho \in B(\mathcal{H})$  tel que pour tout  $X \in B(\mathcal{H})$ ,  $\psi(a) = \text{tr}(\rho X)$ .

Ce théorème montre que les états normaux sur  $B(\mathcal{H})$  correspondent aux opérateurs positif de trace égale à 1. Quel que soit l'état normal  $\psi$  sur  $B(\mathcal{H})$ , il existe un unique opérateur densité  $\rho$  (opérateur positif de trace égale à 1 sur  $B(\mathcal{H})$ ) tel que pour tout  $X \in B(\mathcal{H})$ ,

$$\phi(X) = \text{tr}(\rho X).$$

Réciproquement, tout opérateur  $\rho$  positif de trace égale à 1 sur  $B(\mathcal{H})$  définit un état normal  $\psi_\rho$  défini par  $\text{tr}(\rho \cdot)$ . On notera  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  l'ensemble des états normaux sur  $B(\mathcal{H})$ . Cet ensemble désignera indifféremment les états de  $B(\mathcal{H})$  et l'ensemble des opérateurs densités.

**Remarque 3.20** *Une question naturelle est de savoir si l'ensemble des opérateurs densité de  $B(\mathcal{H})$  est séquentiellement compact pour la norme  $\|\cdot\|_1$ . La réponse est malheureusement négative. Donnons un exemple. Soit  $(f_n)$  une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ , soit  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $F_n = |f_n\rangle\langle f_n|$  la projection sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $f_n$ . La suite  $(F_n)$  est une suite d'état normaux. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une sous-suite de  $(F_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  et un opérateur densité  $\rho$  tels que  $(F_{n_k})$  converge dans  $(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$  vers  $\rho$ . Comme  $\rho$  est normale, on a :*

$$\text{tr} \left( \sum_{i \in I} \rho F_i \right) = \sum_{i \in I} \text{tr}(\rho F_i).$$

Or on remarque que comme la convergence dans  $(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$  implique la convergence dans la topologie  $*$ -faible. On a donc :

$$\text{tr}(\rho) = \text{tr} \left( \sum_{i \in I} \rho F_i \right) = \sum_{i \in I} \lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(F_{n_k} F_i).$$

Le membre de gauche est égal à 1 alors que le membre de droite est égal à 0, car  $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(F_{n_k} F_i) = 0$ . Ce qui est contradictoire. Cet exemple montre que l'ensemble des états normaux n'est pas séquentiellement compact pour la norme  $\|\cdot\|_1$ .

Il est donc intéressant de trouver des critères de convergence dans  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ . On peut définir les mêmes topologies sur  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  que sur  $B(\mathcal{H})$ . Nous avons en plus la topologie définie par la norme  $\|\cdot\|_1$  :

$$\|A\|_1 = \text{tr}(|A|) = \sup_{x \in B(\mathcal{H}), \|x\|=1} \text{tr}(Ax).$$

Nous donnons un théorème qui provient de [67]. Notons  $B_0(\mathcal{H})$  l'ensemble des opérateurs compacts sur  $\mathcal{H}$ .

**Théorème 3.21** [67] *Soit  $(\rho_n)$  une suite d'opérateurs densité et  $\rho$  un opérateur densité. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1.  $(\text{tr}(\rho_n))$  converge uniformément vers  $\text{tr}(\rho)$  dans la norme des formes linéaires.
2.  $(\rho_n)$  converge dans topologie faible  $\sigma(B_1(\mathcal{H}), B_0(\mathcal{H}))$  vers  $\rho$ .
3.  $(\rho_n)$  converge dans  $(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$  vers  $\rho$ , c'est-à-dire dans la norme de la trace.
4.  $(\rho_n)$  converge dans topologie faible  $\sigma(B_1(\mathcal{H}), B(\mathcal{H}))$  vers  $\rho$ .

**Corollaire 3.22** [3, 67] *Soient  $(\rho_n)$  une suite d'opérateurs positifs à trace et  $\rho$  un opérateur positif à trace, on a l'équivalence suivante :*

1.  $(\rho_n)$  converge faiblement vers un opérateur de classe trace positif  $\rho$  et  $(\text{tr}(\rho_n))$  converge vers  $\text{tr}(\rho)$ .

2.  $(\rho_n)$  converge dans  $(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$  vers  $\rho$ .

On peut aussi trouver une preuve directe de cette proposition dans [3].

Nous remarquons que dans ces résultats, nous considérons une suite  $(\rho_n)$  d'états normaux et sa limite  $\rho$  qui est aussi un état normal. Cette condition est essentielle dans les résultats précédents. Donnons un critère dû à Dell'Antonio [23] qui donne une condition pour qu'une suite d'état normaux converge uniformément vers un état normal.

**Proposition 3.23** [23] *Soit  $(\rho_n)$  une suite d'opérateurs densité qui converge  $*$ -faiblement dans  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  c'est-à-dire : pour tout  $X \in B(\mathcal{H})$ ,  $(\text{tr}(\rho_n X))$  est convergente alors il existe un opérateur densité  $\rho$  tel que  $(\rho_n)$  converge dans  $(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$  vers  $\rho$ .*

### 3.5 Algèbres fortement compacts

La notion d'algèbre fortement compacte a été introduite par Lomonosov pour étudier les sous-espaces invariants des opérateurs essentiellement normaux définis sur un espace de Hilbert et étudiée par Lacruz, Rodriguez-Piazza et Marsalli, [48, 49, 54]. Nous utiliserons les algèbres fortement compactes dans le chapitre 8. Ces dernières sont en effet un bon cadre pour généraliser les résultats concernant la purification des trajectoires quantiques valables en dimension finie.

**Définition 3.24** *On dit qu'une algèbre  $\mathcal{R}$  de  $B(\mathcal{H})$  est fortement compacte si sa boule unité  $\{R \in \mathcal{R} \mid \|R\| \leq 1\}$  est compacte pour la topologie forte (SOT). On dit qu'un opérateur  $T \in B(\mathcal{H})$  est fortement compact si l'algèbre engendrée par  $T$  et l'identité  $I$  est fortement compacte.*

**Proposition 3.25** [48] *Supposons que l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est de dimension infinie. Soit  $(E_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces de  $\mathcal{H}$  telle que tous les  $E_i$  soit de dimension finie et telle que leur union soit dense dans  $\mathcal{H}$ . Si  $\mathcal{R}$  est une sous-algèbre de  $B(\mathcal{H})$  telle que pour tout  $R \in \mathcal{R}$ , tous les  $E_i$  soit invariants par  $R$  alors,  $\mathcal{R}$  est un fortement compacte.*

Donnons des exemples d'algèbres fortement compactes.

**Exemple 3.26** [48] *Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base orthonormale de  $\mathcal{H}$ . La sous-algèbre de  $B(\mathcal{H})$  des opérateurs qui ont pour représentation matricielle une matrice triangulaire inférieure dans la base  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une algèbre fortement compacte.*

**Exemple 3.27** [48] *Le commutant  $\mathcal{R}$  de tout opérateur compact dont l'image est dense dans  $\mathcal{H}$  est une algèbre fortement compacte.*

**Exemple 3.28** [48] *Une somme directe de famille d'algèbres fortement compactes est encore une algèbre fortement compacte.*

Plus généralement, Marsalli [54] caractérise en 1990 les algèbres auto-adjointes fortement compactes de  $B(\mathcal{H})$ .

**Proposition 3.29** [54] *Une sous-algèbre autoadjointe de  $B(\mathcal{H})$  est fortement compacte si et seulement si elle peut s'écrire comme une somme directe de sous-algèbres autoadjointes de dimension finie.*

### 3.6 Quelques propriétés des algèbres de von Neumann

Les algèbres de von Neumann (appelées parfois  $W^*$ -algèbres) constituent une classe particulière de  $C^*$ -algèbres. Elles ont été introduites en 1929 par von Neumann ; elles sont utilisées en mécanique quantique, dans la théorie ergodique, dans la théorie des représentations des groupes. Le but de ce paragraphe est de rappeler quelques propriétés des algèbres de von Neumann qui vont nous servir par la suite. Après avoir donné le théorème du bicommutant qui donne une caractérisation algébrique des algèbres de von Neumann, nous donnons le théorème de Sakai qui caractérise les algèbres de von Neumann comme espaces de Banach parmi les  $C^*$ -algèbres et nous introduisons la notion de produit croisé.

**Théorème 3.30 (du bicommutant)** [21] *Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre de  $B(\mathcal{H})$  contenant l'identité, alors la fermeture forte (dans la topologie forte  $SOT$ ) est égal à  $\mathcal{A}''$ .*

Le théorème du bicommutant donne une caractérisation algébrique des algèbres de von Neumann.

**Définition 3.31** *Une algèbre de von Neumann est une sous  $C^*$ -algèbre de  $B(\mathcal{H})$  fermée pour la topologie forte ( $SOT$ ) et contenant l'identité.*

On peut ainsi grâce à ce théorème définir les algèbres de von Neumann comme étant des sous-algèbres auto-adjointes de  $B(\mathcal{H})$  qui coïncident avec leur bicommutant.

#### 3.6.1 Le théorème de Sakai

Dans le paragraphe précédent, les algèbres de von Neumann ont été définies comme étant des algèbres d'opérateurs sur un espace de Hilbert. Tout comme les  $C^*$ -algèbres, il est possible de donner une définition abstraite des algèbres de von Neumann. En 1971, Sakai montre que l'on peut caractériser les algèbres de von Neumann comme étant des  $C^*$ -algèbres admettant un prédual.

**Théorème 3.32** [70] *Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre unifère. Si  $\mathcal{A}$  est isométriquement isomorphe au dual d'un espace de Banach, alors il existe une représentation fidèle  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{K})$  avec  $\mathcal{K}$  un espace de Hilbert telle que  $\pi(\mathcal{A})$  soit une algèbre de von Neumann.*

Cette caractérisation peut être adoptée comme une définition abstraite des algèbres de von Neumann.

#### 3.6.2 Produit croisé d'une algèbre de von Neumann par un groupe

Le produit croisé d'une algèbre de von Neumann  $\mathcal{A}$  par un groupe d'automorphisme de  $\mathcal{A}$  a été introduit par Murray et von Neumann pour définir des algèbres de von Neumann liées à des actions de groupes sur un espace mesurés. Le produit croisé d'une algèbre de von Neumann par un groupe contient à la fois l'algèbre de von Neumann de départ et des informations sur l'action du groupe sur cette dernière. Dans ce paragraphe, nous donnons la définition de ces algèbres de von Neumann. Cela nous permettra de mieux comprendre le chapitre 6 et 7. Pour plus de détails, on se référera à Takesaki, Connes et Izumi dans [72, 20, 35].

Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de von Neumann commutative et  $G$  un groupe discret agissant sur  $\mathcal{A}$  suivant l'action  $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A})$ . On suppose que  $\mathcal{A}$  agit sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . On introduit  $\mathcal{R} := \mathcal{H} \otimes L^2(G)$  qu'on peut voir comme l'espace de Hilbert  $L^2(G, \mathcal{H})$  des

fonctions de carrés sommables définies sur  $G$  à valeurs dans  $\mathcal{H}$ . Soit  $\lambda$  la représentation régulière à gauche de  $G$  sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{R}$ ,

$$(\lambda(g)\xi)(h) = \xi(g^{-1}h), \quad \forall g, h \in G, \forall \xi \in \mathcal{R}.$$

Définissons la représentation  $\pi$  de  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{R}$  définie par :

$$\pi(a)(\xi)(g) = \alpha_g^{-1}(a)\xi(g), \quad \forall a \in \mathcal{A}, \forall \xi \in \mathcal{R}, \forall g \in G.$$

Remarquons que l'on a la condition d'équivariance suivante :

$$\pi(\alpha_g(a)) = \lambda(g)\pi(a)\lambda(g)^{-1}, \quad \forall g \in G, \forall a \in \mathcal{A}.$$

**Définition 3.33** *Le produit croisé  $\mathcal{A} \rtimes_{\pi} G$  est la sous-algèbre de von Neumann de  $B(\mathcal{R})$  engendrée par  $\pi(\mathcal{A})$  et  $(1 \otimes \lambda(g))_{g \in G}$ .*

**Exemple 3.34** *Donnons un exemple intervenant dans [35, 36] et dans le chapitre 6. Soit  $G$  un groupe discret agissant un espace de probabilité  $(\Omega, \nu)$  en préservant  $\nu$ . Soit  $\mathcal{A} := L^{\infty}(\Omega, \nu)$  et  $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{A})$  définie par :*

$$\alpha_g(f)(\omega) := f(g^{-1}\omega) \quad \forall g \in G, \quad \forall f \in L^{\infty}(\Omega, \nu), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

*Le produit croisé  $L^{\infty}(\Omega, \nu) \rtimes_{\pi} G$  est ainsi l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi(L^{\infty}(\Omega, \nu))$  et  $(1 \otimes \lambda(g))_{g \in G}$ .*

Cette construction est un cas particulier du produit croisé d'une algèbre de von Neumann par la fibre d'un groupoïde mesurable. Nous verrons la définition de ce produit au chapitre 7.



## Chapitre 4

# Applications complètement positives

Les applications complètement positives apparaissent en mécanique quantique en raison de leur rigidité vis-à-vis du produit tensoriel et de la positivité. Elles représentent des opérations quantiques (mesures, canaux, portes quantiques...). Avant d'étudier les applications complètement positives, nous introduisons les applications complètement bornées sur un système d'opérateurs de  $B(\mathcal{H})$ . Nous rappelons le théorème Stinespring et ses conséquences. Les propriétés des applications complètement positives permettent alors de définir une unique structure de  $C^*$ -algèbres sur des systèmes d'opérateurs sous certaines hypothèses. Les applications complètement positives de  $M_2(\mathbb{C})$  ont été caractérisées récemment dans [69]. Nous donnons un résumé de cette caractérisation ainsi que des exemples de canaux quantiques. Enfin la notion d'application complètement positive permet de définir l'injectivité et l'enveloppe injective d'un système d'opérateurs.

### 4.1 Applications complètement bornées

Commençons par définir un système d'opérateurs de  $B(\mathcal{H})$ .

**Définition 4.1** *On appelle système d'opérateurs tout sous-espace vectoriel de  $B(\mathcal{H})$  contenant l'identité  $I_{\mathcal{H}}$  de  $B(\mathcal{H})$  auto-adjoint.*

Considérons un système d'opérateurs  $S \subset B(\mathcal{H})$ . Notons  $M_n(S)$  l'ensemble des matrices carrées de taille  $n$  à valeurs dans  $S$ . Soit  $\Phi : S \ni x \longrightarrow \Phi(x) \in S$  une application linéaire sur  $S$ . L'application  $\Phi$  induit alors pour tout  $n \geq 1$  l'application :

$$\Phi^{(n)} : M_n(S) \ni (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \longrightarrow (\Phi(a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(B(S)).$$

Nous avons alors la suite croissante suivante :

$$\|\Phi\| = \|\Phi^{(1)}\| \leq \|\Phi^{(2)}\| \leq \dots \leq \|\Phi^{(n)}\| \leq \dots$$

**Définition 4.2** *Soit  $S \subset B(\mathcal{H})$  un système d'opérateur. On dit qu'une application linéaire  $\Phi : S \ni x \longrightarrow \Phi(x) \in S$  est :*

1. *complètement bornée si pour tout  $\|\Phi\|_{cb} := \sup_{n \geq 1} \|\Phi^{(n)}\| < \infty$ .*
2. *complètement contractante si  $\|\Phi\|_{cb} := \sup_{n \geq 1} \|\Phi^{(n)}\| \leq 1$*
3. *complètement positive si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Phi^{(n)}$  est positive.*

Remarquons que toute application complètement positive est complètement bornée avec  $\|\Phi(I_{\mathcal{H}})\| = \|\Phi\| = \|\Phi\|_{cb}$ . De plus, si  $\Phi(I_{\mathcal{H}}) = I_{\mathcal{H}}$  alors  $\Phi$  est complètement contractante.

Donnons quelques exemples d'applications complètement positives :



**Exemple 4.3** [21] Soit  $X$  un espace compact. On note  $C(X)$  la  $C^*$ -algèbre des fonctions continues sur  $X$  ; toute application positive sur  $C(X)$  est complètement positive.

**Exemple 4.4** [21] Toute forme linéaire positive sur un système d'opérateurs est une application complètement positive.

**Exemple 4.5** [21] Soit  $S$  un système d'opérateurs et  $X$  un espace compact, tout application positive  $\phi : S \rightarrow C(X)$  est complètement positive.

Donnons un exemple d'application positive qui n'est pas complètement positive. Considérons l'application transposée :

$$T : M_2(\mathbb{C}) \ni A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow {}^t A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

La matrice de  $T^{(2)}$  est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme les valeurs propres de  $T^{(2)}$  sont -1 et 1, on voit que  $T^{(2)}$  n'est pas positive.

En mécanique quantique, la condition de positivité n'est pas assez forte. En effet si on travaille avec un système quantique représenté par un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et que l'on applique une opération quantique  $\Phi$  sur ce système, il est alors naturel d'introduire un système auxiliaire qui modélise l'environnement et qui est représenté par un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  dont la dimension est arbitraire. L'opération quantique sur ce système quantique dont l'espace est  $\mathcal{K} \otimes \mathcal{H}$  est donnée par  $1 \otimes \Phi$ . Il est naturel d'exiger de  $1 \otimes \Phi$  d'être positive. C'est de là que vient la contrainte de complète positivité.

**Théorème 4.6** [17, 60] Soit  $\Phi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$  une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'application  $\Phi$  est complètement positive.
2. L'application  $\Phi^{(n)}$  est positive.
3. La matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \Phi(E_{11}) & \dots & \Phi(E_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(E_{n1}) & \dots & \Phi(E_{nn}) \end{pmatrix}$$

est positive, où les  $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  sont les matrices élémentaires forment la base canonique de  $M_n(\mathbb{C})$ .

## 4.2 Théorème de Stinespring

Le théorème de dilatation de Stinespring démontré en 1955 est une généralisation de la représentation GNS. Nos références sont [21, 26]. Considérons deux espaces de Hilbert  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$ . Soit  $V : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  une isométrie. Ainsi  $V^*V = I_{\mathcal{H}}$  et  $P := VV^*$  est la projection de  $\mathcal{K}$  sur son image  $V(\mathcal{H})$ . On remarque de plus que pour tout  $T \in B(\mathcal{K})$ ,  $V^*TV \in B(\mathcal{H})$ . On peut donc écrire  $PT|_{\mathcal{H}}$  au lieu de  $V^*TV$ , en identifiant  $\mathcal{H}$  à  $V(\mathcal{H})$ .

**Théorème 4.7 (Théorème de Stinespring)** [21] *Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre. Soit  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$  une application complètement positive et unifière ( $\Phi(I_{\mathcal{A}}) = I_{\mathcal{H}}$ ), alors il existe un espace de Hilbert  $\mathcal{K}$  contenant  $\mathcal{H}$  et un  $*$ -homomorphisme  $\rho : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{K})$  tel que :*

$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad \phi(a) = P_{\mathcal{H}}\rho(a) \mid_{\mathcal{H}}.$$

Donnons quelques corollaires du théorème de Stinespring.

**Corollaire 4.8** [21] *Soit  $\phi : C(X) \rightarrow B(\mathcal{H})$  une application positive et unifière, alors il existe un espace de Hilbert  $\mathcal{K}$  contenant  $\mathcal{H}$  et un  $*$ -homomorphisme  $\rho : C(X) \rightarrow B(\mathcal{K})$  tel que :*

$$\forall f \in C(X), \quad \phi(f) = P_{\mathcal{H}}\rho(f) \mid_{\mathcal{H}}.$$

**Corollaire 4.9** [26] *Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$  algèbre. Soit  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$  une application complètement positive unifière alors :*

$$\forall a \in \mathcal{A}, \quad \phi(a)^*\phi(a) \leq \phi(a^*a).$$

*Si de plus  $\phi(a)^*\phi(a) = \phi(a^*a)$  alors :*

$$\forall b \in \mathcal{A}, \quad \phi(ab) = \phi(a)\phi(b).$$

Choi a été le premier à caractériser les applications complètement positives en dimension finie dans [17]. Le corollaire suivant caractérise de la même manière les applications normales complètement positives. On trouvera la preuve de ce corollaire dans [27].

**Proposition 4.10** [27] *Soit  $\Phi : x \in B(\mathcal{H}) \rightarrow \Phi(x) \in B(\mathcal{H})$  une application linéaire ;  $\Phi$  est une application normale complètement positive si et seulement s'il existe une suite  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  of  $B(\mathcal{H})$  telle que*

$$\forall x \in B(\mathcal{H}), \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i x a_i^*.$$

Remarquons que cette famille n'est pas en général unique et que dans le cas où la somme est infinie, la limite est prise au sens de la topologie forte. Dans le cas où  $\mathcal{H}$  est de dimension finie  $k$ , on peut trouver  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telle que  $T_i = 0$  si  $i > k^2$ .

### 4.3 Unicité de la structure de $C^*$ -algèbre sur un système d'opérateurs

Si un système d'opérateur possède une structure de  $C^*$ -algèbre, alors cette dernière est unique. Nous nous appuyons sur les notes de Arveson [6].

**Proposition 4.11** [6] *Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre unital. Soit  $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$  un système d'opérateurs. Supposons que l'on ait deux  $C^*$ -algèbres  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  et deux isomorphismes complètement ordonnés  $\phi_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{S}$  et  $\phi_2 : \mathcal{A}_2 \rightarrow \mathcal{S}$ . Alors la composée  $\phi_2^{-1}\phi_1$  est un  $*$ -isomorphisme de  $\mathcal{A}_1$  vers  $\mathcal{A}_2$ .*

*Preuve:* Notons  $\phi := \phi_2^{-1}\phi_1 : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ . Alors  $\phi$  et  $\phi^{-1}$  sont complètement positives et unifères en tant que composée de telles applications, ainsi son inverse l'est aussi. Il suffit de montrer que  $\phi$  est multiplicative. L'inégalité de Schwarz donne :  $\forall x \in \mathcal{A}_1, \phi(x^*x) \geq \phi(x^*)\phi(x)$ . Ainsi :

$$x^*x = \phi^{-1}\phi(x^*x) \geq \phi^{-1}(\phi(x^*)\phi(x)) \geq \phi^{-1}(\phi(x^*))\phi^{-1}(\phi(x)) = x^*x.$$

La dernière égalité provenant de l'application de l'inégalité de Schwarz. On a donc une chaîne d'égalité avec notamment :  $\phi^{-1}(\phi(x^*)\phi(x)) = x^*x$ . Donc  $\phi(x^*x) = \phi(x^*)\phi(x)$ . En appliquant un argument de polarisation on obtient bien  $\forall x, y \in \mathcal{A}_1, \phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$  ce qui prouve que  $\phi$  est multiplicative.  $\square$

Ainsi, s'il existe deux multiplications  $\circ_1$  et  $\circ_2$  qui confèrent à un système d'opérateurs  $\mathcal{S}$  deux structures de  $C^*$ -algèbres, alors il existe un isomorphisme entre les  $C^*$ -algèbres  $(\mathcal{S}, \circ_1)$  et  $(\mathcal{S}, \circ_2)$ .

#### 4.4 Applications complètement positives sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Les applications complètement positives sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  jouent un rôle important dans la théorie quantique de l'information. Nous présentons leur caractérisation. On s'appuiera sur l'article [69].

Soit  $\Phi$  une application complètement positive préservant l'unité sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . Introduisons  $\mathcal{B}$  la base de Pauli sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ,  $\{I_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  définie par

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tout élément  $x \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  se décompose dans cette base :

$$x = w_0 I + w_x \sigma_x + w_y \sigma_y + w_z \sigma_z = w_0 I + \mathbf{w} \cdot \sigma$$

où  $\mathbf{w} := (w_x, w_y, w_z)$  et  $\sigma := (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ ;  $\Phi$  admet donc une représentation matricielle dans cette base de la forme :

$$\mathbf{T} := M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{t} & T \end{pmatrix}$$

où  $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  et  $\mathbf{0}, \mathbf{t}$  sont respectivement des vecteurs ligne et colonne.

**Remarque 4.12** Une application  $\Phi$  complètement positive unifère préserve la trace si et seulement si  $\mathbf{t} = 0$ .

Comme  $\Phi$  est positive,  $\Phi$  applique le sous-espace des matrices auto-adjointes de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  sur lui-même. Ceci implique que  $\mathbf{T}$  est une matrice réelle. Quitte à faire deux changements de base, on peut exprimer la matrice  $\mathbf{T}$  sous la forme :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi_{\mathbf{t}, \Lambda}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\Phi(x) = U [\Phi_{\mathbf{t}, \Lambda}(VxV^*)] U^*$$

où  $U, V$  sont deux matrices carrées unitaires de taille  $2 \times 2$ .

**Théorème 4.13** [69]

Une application  $\Phi$  définie par la représentation matricielle (4.1) avec  $|t_3| + |\lambda_3| \leq 1$  est complètement positive si, et seulement si, l'équation ci-dessous admet une solution  $R_\Phi$  qui est une contraction :

$$\begin{pmatrix} t_1 + it_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & t_1 + it_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + t_3 + \lambda_3)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (1 + t_3 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} R_\Phi \begin{pmatrix} (1 - t_3 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (1 - t_3 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

**Remarque 4.14** Dans le cas où  $|t_3| + |\lambda_3| < 1$ , l'équation (4.2) a une unique solution  $R_\Phi$  qui est :

$$R_\Phi := \begin{pmatrix} \frac{t_1 + it_2}{(1 + t_3 + \lambda_3)^{\frac{1}{2}} (1 - t_3 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}}} & \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{(1 + t_3 + \lambda_3)^{\frac{1}{2}} (1 - t_3 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(1 + t_3 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}} (1 - t_3 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}}} & \frac{t_1 + it_2}{(1 + t_3 + \lambda_3)^{\frac{1}{2}} (1 - t_3 - \lambda_3)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Dans le cas où  $|t_3| + |\lambda_3| = 1$ , l'équation (4.2) n'admet pas de solution sauf si  $t_1 = t_2 = 0$  ou bien  $\lambda_1 = \lambda_2$  ou  $\lambda_1 = -\lambda_2$ . Dans tous les cas, on peut prendre comme solution la matrice :

$$R_\Phi = \frac{\lambda_1}{\sqrt{|\lambda_3|}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Revenons au cas où  $|t_3| + |\lambda_3| < 1$  et traduisons le fait que  $R_\Phi$  soit une contraction. Cette dernière condition implique d'une part que les éléments diagonaux de  $R_\Phi R_\Phi^*$  et de  $R_\Phi^* R_\Phi$  sont inférieures à 1. Ceci implique :

$$(\lambda_1 + \lambda_2)^2 \leq (1 + \lambda_3)^2 - t_3^2 - (t_1^2 + t_2^2) \left( \frac{1 + \lambda_3 \pm t_3}{1 - \lambda_3 \pm t_3} \right), \quad (4.5)$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \leq (1 - \lambda_3)^2 - t_3^2 - (t_1^2 + t_2^2) \left( \frac{1 - \lambda_3 \pm t_3}{1 + \lambda_3 \pm t_3} \right), \quad (4.6)$$

et d'autre part que  $R_\Phi^* R_\Phi \leq I$ . Ceci montre que  $\det(I - R_\Phi^* R_\Phi) \geq 0$ . Cette dernière condition se traduit par :

$$[1 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)]^2 \geq 4 [\lambda_1^2(t_1^2 + \lambda_2^2) + \lambda_2^2(t_2^2 + \lambda_1^2) + \lambda_3^2(t_3^2 + \lambda_1^2) - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3]. \quad (4.7)$$

**Corollaire 4.15** [69] Une application  $\Phi$  définie par la représentation matricielle (4.1) avec  $|t_3| + |\lambda_3| \leq 1$  est complètement positive si et seulement si les équations (4.5), (4.6), (4.7) sont vérifiées. Dans le cas où on a  $|t_3| + |\lambda_3| = 1$ , les équations (4.5), (4.6) sont telles que  $t_1 = t_2 = 0$ .

## 4.5 Exemples de canaux

Un canal quantique est une application complètement positive préservant la trace. D'après le corollaire 9.2, on sait que tout canal quantique unifère sur  $M_2(\mathbb{C})$  s'écrit sous la forme :

$$\Phi(X) = E_0 X E_0^* + E_1 X E_1^*,$$

où  $E_0$  et  $E_1$  sont appelés les opérateurs de Kraus pour  $\Phi$  et vérifient :

$$E_0 E_0^* + E_1 E_1^* = E_0^* E_0 + E_1^* E_1 = I_2.$$

Donnons des applications complètement positives appelées aussi canaux quantiques que l'on utilise couramment en théorie quantique de l'information.

Opérateurs de Kraus	$E_0$	$E_1$
canal dépolarisant 1	$\sqrt{1 - \frac{3p}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{p}{4}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
canal dépolarisant 2	$\sqrt{\frac{p}{4}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{p}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
amortisseur d'amplitude	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \gamma} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
amortisseur de phase	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \gamma} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma} \end{pmatrix}$
phase flip	$\sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\sqrt{1 - p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
bit flip	$\sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\sqrt{1 - p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
bit-phase flip	$\sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\sqrt{1 - p} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Pour voir une mise en application de ces canaux quantiques, on se réfèrera au livre [59]. Le formalisme de la théorie quantique de l'information et notamment celui des canaux quantiques a des applications en physique quantique (particules quantiques [45], trous noirs [25]).

## 4.6 Injectivité et enveloppe injective

Dans ce paragraphe, nous allons traiter de la notion d'injectivité d'un système d'opérateur de  $B(\mathcal{H})$ . Les résultats exposés ci-dessous sont tirés du livre de Paulsen [61] et de l'article de Hamana [29].

**Définition 4.16** Soit  $S \subset B(\mathcal{H})$  un système d'opérateurs, on dit que  $S$  est injective s'il existe une application  $\psi : B(\mathcal{H}) \rightarrow S$  complètement contractante et idempotente. On dit dans ce cas que  $\psi$  est une projection de  $B(\mathcal{H})$  sur  $S$ .

**Définition 4.17** Soit  $\mathcal{A}$  une  $C^*$ -algèbre. On dit qu'une application  $\psi$  est une espérance conditionnelle sur  $\mathcal{A}$  si  $\psi$  est positive et idempotente, l'image de  $\psi$  est une  $C^*$ -algèbre noté  $\mathcal{D}$  et que pour tout  $B \in N$ ,  $C \in \mathcal{A}$ ,

$$\psi(BC) = B\psi(C) \quad \text{et} \quad \psi(CB) = \psi(C)B.$$

**Proposition 4.18** Soit  $\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$  une  $C^*$ -algèbre.  $\mathcal{A}$  est injective si et seulement si il existe une espérance conditionnelle sur  $B(\mathcal{H})$  dont l'image est égale à  $\mathcal{A}$ .

**Proposition 4.19** [28] Une algèbre de von Neumann  $\mathcal{A}$  est injective si et seulement si,  $\mathcal{A}'$  est injective.

Intuitivement l'enveloppe injective d'un système d'opérateurs  $S$  est un système d'opérateurs injectif minimal contenant un système d'opérateurs donné  $S$ . Hamana [29] montre l'existence et l'unicité d'un système d'opérateurs injectif minimal contenant un système d'opérateurs donné  $S$  modulo la relation d'équivalence définie ci-dessous.

**Définition 4.20** Soit  $S$  un système d'opérateurs. On appelle extension de  $S$  tout couple  $(\mathcal{E}, \kappa)$  où  $\mathcal{E}$  est un système d'opérateurs et  $\kappa : S \rightarrow \mathcal{E}$  est une injection unifère complètement positive.

**Définition 4.21** Soit  $S_1$  et  $S_2$  deux systèmes d'opérateurs tels qu'il existe un isomorphisme unital complètement ordonné  $l : S_1 \rightarrow S_2$ . Soient  $(\mathcal{E}_1, \kappa_1)$  et  $(\mathcal{E}_2, \kappa_2)$  des extensions respectives de  $S_1$  et  $S_2$ . On dit que  $(\mathcal{E}_1, \kappa_1)$  et  $(\mathcal{E}_2, \kappa_2)$  sont équivalentes :

$$(\mathcal{E}_1, \kappa_1) \sim (\mathcal{E}_2, \kappa_2)$$

s'il existe un isomorphisme unital complètement ordonné  $\hat{l} : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$  tel que  $\hat{l} \circ \kappa = \kappa_1 \circ l$ .

**Théorème 4.22** [29] Tout système d'opérateurs  $S \subset B(\mathcal{H})$  admet une unique enveloppe (respectivement  $C^*$ -enveloppe) injective, l'unicité étant prise au sens de la relation d'équivalence  $\sim$  définie plus haut.

Les notions d'injectivité et d'enveloppe injective d'un système d'opérateurs interviennent dans les conjectures formulées dans [4] auxquelles nous allons répondre au chapitre 6.



## Chapitre 5

# Frontières de Poisson d'un groupe discret

La notion de frontière de Poisson apparaît dans l'étude asymptotique des marches aléatoires sur un groupe discret et plus généralement sur des espace discrets. Le but de cette notion est d'obtenir un objet mathématique qui renferme les propriétés asymptotiques des marches aléatoires sur le groupes ou l'espace discret étudiés. Nous définirons en premier lieu la notion de frontière de Poisson sur un groupe discret. Puis nous identifierons théoriquement cette dernière, cette identification nous conduira à une approche fonctionnelle de la frontière de Poisson. La moyennabilité du groupe est étudiée et le lien avec la frontière de Poisson est donnée. Nous donnons en dernier lieu quelques exemples le groupe des allumeurs de réverbères et le groupe de Baumslag-Solitar.

### 5.1 Généralités

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans le cadre particulier des marches aléatoires sur un groupe discret. Nous appuyons sur [43, 9, 40].

#### 5.1.1 Marche aléatoire sur un groupe

Soit  $G$  un groupe discret dénombrable dont l'élément neutre est noté  $e$ . Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $G$ .

**Définition 5.1** 1. On appelle support de  $\mu$  noté  $\text{supp}(\mu)$ , l'ensemble :

$$\text{supp}(\mu) := \{g \in G \mid \mu(g) > 0\}.$$

2. On appelle la réflexion de la mesure  $\mu$  la mesure  $\check{\mu}$  définie par :

$$\forall g \in G, \check{\mu}(g) = \mu(g^{-1}).$$

3. On dit que  $\mu$  est non dégénérée ou adaptée si le semi-groupe engendré par  $\text{supp}(\mu)$  est  $G$ ,

4. symétrique si  $\mu = \check{\mu}$ .

Dans toute la suite on supposera que  $\mu$  est non-dégénérée.

**Définition 5.2** L'ensemble  $G^\infty := G^\mathbb{N}$  des suites à valeurs dans  $G$  est appelé l'espace des trajectoires. Tout élément  $y = (y_0, y_1, \dots) \in G^\infty$  est une trajectoire.



$G^\infty$  est muni de la topologie produit.

**Définition 5.3** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , les applications coordonnées  $C^n$  de  $G^\infty$  dans  $G$  sont définies par :

$$C^n : G^\infty \ni y = (y_0, y_1, \dots) \mapsto y_n \in G.$$

Par commodité, on notera souvent  $y_n$  au lieu de  $C^n y$ .

**Définition 5.4** La marche aléatoire à droite  $(G, \mu)$  sur le groupe  $G$  définie par la mesure de probabilité  $\mu$  est la chaîne de Markov homogène avec pour espace d'états  $G$  et probabilités de transition suivantes, pour tout  $g, h \in G$ ,

$$p(g, h) = \mu(g^{-1}h),$$

invariante par l'action canonique à gauche de  $G$  sur lui-même.

L'opérateur de Markov  $\phi_\mu$  associé à la marche aléatoire  $(G, \mu)$  est  $\phi_\mu : l^\infty(G) \rightarrow l^\infty(G)$  défini par :

$$\phi_\mu f(h) = \sum_{g \in G} f(hg) \mu(g),$$

où  $f \in l^\infty(G)$  et  $h \in G$ .

**Définition 5.5** Une fonction  $f$  de  $l^\infty(G)$  est dite  $\phi_\mu$ -harmonique si elle vérifie pour tout  $g \in G$  :

$$f(h) = \sum_{g \in G} f(hg) \mu(g).$$

Une fonction  $\phi_\mu$ -harmonique est un point fixe de l'opérateur de Markov  $\phi_\mu$ . L'ensemble des fonctions  $\phi_\mu$ -harmonique est noté  $\text{fix}(\phi_\mu)$ .

Muni de la norme  $\|f\| = \sup_{x \in G} f(x)$ ,  $\text{fix}(\phi_\mu)$  est un espace de Banach.

**Proposition 5.6** [66] L'ensemble  $\phi_\mu$  est une algèbre de Banach commutative quand on le munit du produit  $\times$  défini : pour tout  $f_1, f_2 \in \phi_\mu$  et pour tout  $h \in G$ ,

$$(f_1 \times f_2)(h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_\mu^n(f_1 f_2)(h).$$

La position d'une marche aléatoire à l'instant  $n$  sur  $G$  est donnée par le produit de variables aléatoires  $Y_0 Y_1 \cdots Y_n$  où  $Y_1, \dots, Y_n$  sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $G$  identiquement distribuées de loi  $\mu$ . La variable aléatoire  $Y_0$  indépendante de  $Y_1, \dots, Y_n$  représente la position initiale et a pour loi  $\theta$ . On définit la tribu

$$\mathcal{B}^\infty = \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{B} = \sigma(C_0 \cdots C_n \cdots),$$

où  $\mathcal{B}$  est la tribu sur  $G$ . On peut ainsi définir une mesure  $\mathbb{P}_\theta$  sur  $(G^\infty, \mathcal{B}^\infty)$  de loi initiale  $\theta$  comme étant l'image de la mesure  $\theta \times (\mu)^\infty$  sur  $(G^\infty, \mathcal{B}^\infty)$  par l'application :

$$(y_0, y_1, y_2 \cdots) \mapsto (y_0, y_0 y_1, y_0 y_1 y_2, \cdots).$$

Dans le cas où  $\theta = \delta_g$ , on notera  $\mathbb{P}_g := \mathbb{P}_{\delta_g}$ .

### 5.1.2 Frontière de Poisson

**Définition 5.7** *Le shift  $T : G^\infty \rightarrow G^\infty$  est définie de la manière suivante pour tout  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G^\infty$ ,*

$$T((y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (y_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}.$$

**Définition 5.8** *L'espace des composantes ergodiques pour le shift  $T$  sur l'ensemble des trajectoires  $(G^\infty, \mathbb{P}_\theta)$  est appelé frontière de Poisson de la marche aléatoire  $(G, \mu)$ .*

Précisons cette définition, on définit sur  $(G^\infty, \mathbb{P}_\theta)$  la relation d'équivalence, pour tout  $y, y' \in G^\infty$

$$y \sim y' \iff \exists n, n' \in \mathbb{N}, T^n y = T^{n'} y'.$$

Notons  $\mathcal{B}^{(i)}$  la tribu des ensembles  $T$ -invariants de  $(G^\infty, \mathbb{P}_\theta)$  :

$$\mathcal{B}^{(i)} = \{A \in \mathcal{B}^\infty \mid T^{-1}(A) = A\}.$$

Comme  $(G^\infty, \mathbb{P}_\theta)$  est un espace de Lebesgue, il existe à isomorphisme près un unique espace mesurable  $\Omega$  (c'est l'ensemble des composantes ergodiques) et une application :

$$\text{bnd} : G^\infty \rightarrow \Omega.$$

L'application  $\text{bnd}$  transporte la structure de tribu de  $(G^\infty, \mathbb{P}_\theta)$  modulo la relation d'équivalence  $\sim$  sur l'espace  $\Omega$ .

**Définition 5.9** *Pour toute distribution initiale  $\theta$  sur  $G$ , la mesure  $\tilde{\mathbb{P}}_\theta = \text{bnd}(\mathbb{P}_\theta)$  sur  $\Omega$  est appelée mesure harmonique déterminée par  $\theta$ .*

Les applications sur  $G^\infty$  qui sont mesurables pour la tribu  $\mathcal{B}^{(i)}$  sont appelées les variables aléatoires invariantes. Ceci est justifié par la proposition suivante :

**Proposition 5.10** *Une application  $f$  qui est  $\mathcal{B}^\infty$ -mesurable est  $\mathcal{B}^{(i)}$ -mesurable si et seulement si  $f \circ T = f$ .*

**Définition 5.11** *On dit qu'un élément  $A$  de  $\mathcal{B}^{(i)}$  est universellement négligeable, si pour tout  $g \in G$ ,*

$$\mathbb{P}_g(A) = 0.$$

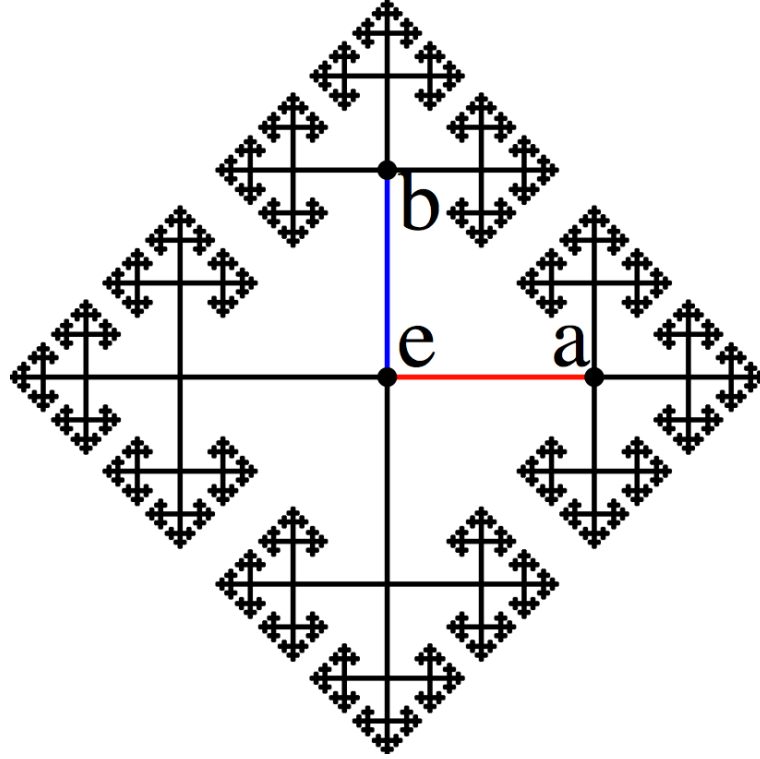
**Exemple 5.12** *Soit  $\mathbb{F}_2$  le groupe libre engendré par deux éléments  $a$  et  $b$ . Considérons  $\mu$  la mesure de probabilité sur  $\mathbb{F}_2$  définie par :*

$$\mu(a) = \mu(b) = \mu(a^{-1}) = \mu(b^{-1}) = \frac{1}{4}.$$

*On peut définir les probabilités de transition par  $p(x, y) = \mu(x^{-1}y)$  où  $x, y$  sont des éléments de  $\mathbb{F}_2$ . Remarquons que ces probabilités de transition sont invariante par l'action à gauche du groupe  $\mathbb{F}_2$  dans le sens où  $p(gx, gy) = p(x, y)$ . La marche aléatoire associé à  $\mathbb{F}_2$  et à  $\mu$  est donc donné par les probabilités de transition :*

$$p(e, a) = p(e, b) = p(e, a^{-1}) = p(e, b^{-1}) = \frac{1}{4}.$$

*Considérons le graphe de Cayley de  $\mathbb{F}_2$  ci-après tiré de wikipédia, c'est un arbre homogène :*



La frontière de Poisson de  $(\mathbb{F}_2, \mu)$  est l'ensemble des mots réduits de longueur infini [43].

### 5.1.3 Identification de la frontière de Poisson

On définit la contraction  $R : l^\infty(G^\infty) \rightarrow l^\infty(G)$  définie pour tout  $F \in l^\infty(G^\infty)$  et pour tout  $g \in G$  par :

$$(RF)(g) = \int_{G^\infty} F(y) d\mathbb{P}_g(y).$$

**Théorème 5.13** [43, 36, 56] *L'application  $R$  est un isomorphisme isométrique de  $L^\infty(\Omega, \mathbb{P}_e)$  dans  $\text{fix}(\phi_\mu)$ . Pour tout  $f \in \text{fix}(\phi_\mu)$ , la suite  $(f \circ C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge universellement presque partout vers  $R^{-1}f$ . L'isométrie est donnée par les formules :*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) &= F(\text{bnd}(y)), \quad \forall y \in G^\infty \\ f(g) &= \int_{\Omega} F(\omega) d\tilde{\mathbb{P}}_g(\omega), \quad \forall g \in G. \end{aligned}$$

où  $f \in \text{fix}(\phi_\mu)$  et  $F \in L^\infty(\Omega, \mathbb{P}_e)$ .

Cette isomorphisme permet d'identifier  $L^\infty(\Omega, \mathbb{P}_e)$  et  $\text{fix}(\phi_\mu)$ . L'ensemble  $\text{fix}(\phi_\mu)$  est ainsi aussi appelé frontière de Poisson de  $(G, \mu)$  ou frontière de Poisson de  $\phi_\mu$ . En utilisant la dérivée de Radon-Nikodym on obtient la formule de Poisson :

$$f(g) = \int_{\Omega} F(\omega) d\tilde{\mathbb{P}}_g(\omega) = \int_{\Omega} F(\omega) \Pi(g, \omega) d\tilde{\mathbb{P}}_e,$$

où la dérivée de Radon-Nikodym  $\Pi(g, \omega) := \frac{d\tilde{\mathbb{P}}_g}{d\tilde{\mathbb{P}}_e}(\omega)$  est appelée noyau de Poisson.

### 5.1.4 Le critère d'entropie

La notion d'entropie a été introduite par Avez, Kaimanovich et Vershik, elle va permettre de caractériser la trivialité de la frontière de Poisson d'une marche  $(G, \mu)$ .

**Définition 5.14** *Soit  $G$  un groupe discret dénombrable. L'entropie d'une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $G$ , notée  $H(\mu)$  est définie par ;*

$$H(\mu) := - \sum_{g \in \text{supp}(G)} \mu(g) \ln(\mu(g)).$$

**Proposition 5.15** [43] *Soient  $\mu'$  et  $\mu''$  deux mesures de probabilité sur  $G$  dont les entropies sont finies, l'entropie de la convolée  $\mu'\mu''$  est finie et on a l'inégalité :*

$$H(\mu'\mu'') \leq H(\mu') + H(\mu'').$$

Fixons maintenant une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $G$  de telle sorte que  $H(\mu)$  soit finie. On note  $\mu_n$  la  $n$ -ième convolée de  $\mu$ . Notons  $h_n := H(\mu_n)$  en posant  $h_0 := H(\mu_0) = H(\delta_e) = 0$ . On a alors la formule :

$$h_n = H(\mu_n) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(y_n) \ln(\mu_n(y_n)).$$

Comme la suite  $(h_n)$  est sous-additive,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{n}$  existe et est majorée par  $H(\mu)$ .

**Définition 5.16** *Soient  $G$  un groupe discret dénombrable et  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $G$  avec une entropie  $H_\mu$  finie. On définit l'entropie de la paire  $(G, \mu)$  notée  $h(G, \mu)$  comme étant la limite :*

$$h(G, \mu) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(\mu_n)}{n}.$$

**Théorème 5.17** [43] *Soient  $G$  un groupe discret dénombrable et  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $G$  avec une entropie  $H_\mu$  finie. La frontière de Poisson de la marche aléatoire  $(G, \mu)$  est triviale si et seulement si  $h(G, \mu) = 0$ .*

## 5.2 Moyennabilité et frontières de Poisson

La notion de groupe moyennable a été introduite en 1929 par John von Neumann dans l'étude du paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux cas des groupes discrets. Nous donnerons plusieurs caractérisations équivalentes de la moyennabilité d'un groupe.

### 5.2.1 Groupes moyennables

**Définition 5.18** *Soit  $X$  un ensemble. Soit  $G$  un groupe discret agissant sur  $X$ . Soit  $\mu$  une moyenne, c'est-à-dire une mesure de probabilité finiment additive sur  $X$ . On dit que  $\mu$  est invariante par  $G$ , si pour tout sous-ensemble  $A$  de  $X$  et pour tout  $g \in G$  :*

$$\mu(g(A)) = \mu(A).$$

Rappelons que le groupe  $G$  agit sur lui même par translation à droite. En effet soit  $g \in G$ , pour tout  $h \in G$  :

$$g \cdot h = hg.$$

**Définition 5.19** On dit qu'un groupe  $G$  est moyennable (à droite) s'il existe une forme linéaire  $M$  sur  $l^\infty(G)$  appelée moyenne sur  $l^\infty(G)$  telle que :

1. Pour tout élément positif  $f$  de  $l^\infty(G)$ ,  $M(f) \geq 0$ .
2.  $M(\mathbf{1}) = 1$ .
3. Pour tout  $A \subset G$ , pour tout  $g \in G$ ,  $M(Ag) = M(A)$ .

On dit que  $M$  est une moyenne invariante par  $G$  pour l'action de translation à droite.

**Théorème 5.20** [10, 75] Soit  $G$  un groupe discret, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Le groupe  $G$  est moyennable.
2. Pour toute action de  $G$  sur un ensemble  $X$ , il existe une moyenne invariante sur  $X$  par  $G$ .
3. Pour toute action continue de  $G$  sur un compact  $X$ , il existe une mesure de probabilité sur  $X$  invariante par  $G$ .
4. Toute action affine et continue de  $G$  sur un convexe compact non vide d'un espace vectoriel localement convexe admet un point fixe.

**Théorème 5.21** [10, 75]

1. Les groupes finis sont moyennables.
2. Tout sous groupe d'un groupe moyennable est moyennable.
3. Soit  $H$  un sous groupe moyennable d'indice fini de  $G$ , alors  $G$  est moyennable.
4. Si  $H$  et  $G$  sont deux groupes moyennables alors le produit semi-direct de  $H \rtimes G$  est moyennables.
5. Tout groupe abélien est moyennable.

**Exemple 5.22** Le groupe libre à 2 générateurs  $a$  et  $b$  noté  $\mathbb{F}_2$  n'est pas moyennable [77].

**Exemple 5.23** 1. Soit  $n \geq 2$  un entier, le groupe libre à  $n$  générateurs noté  $\mathbb{F}_n$  n'est pas moyennable.

2. Soit  $n \geq 3$  un entier, le groupe orthogonal  $O_n(\mathbb{R})$  n'est pas moyennable.

3. Soit  $n \geq 3$  un entier, le groupe spécial orthogonal  $SO_n(\mathbb{R})$  n'est pas moyennable.

En effet, le groupe  $SO_3(\mathbb{R})$  contient deux rotations qui engendrent le groupe libre à deux éléments :

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Day a conjecturé que tout groupe non moyennable contenait un sous groupe libre à deux générateurs. Ol'shanskii a répondu négativement à cette conjecture. Il existe d'autres exemples comme les groupes de Burnside  $B(2, n)$  pour tout entier impair  $n \geq 665$ , où  $B(2, n)$  est le groupe à deux générateurs tel que tout élément  $g$  du groupe vérifie  $g^n = 1$ .

**Proposition 5.24** [43] Supposons que  $G$  soit non moyennable. Alors pour toute mesure de probabilité non dégénérée  $\mu$  sur  $G$ , la frontière de Poisson de  $(G, \mu)$  est non triviale.

Furstenberg avait conjecturé que la réciproque de la proposition 5.24 est vraie : pour tout groupe  $G$  moyennable, il existe une mesure  $\mu$  sur  $G$  telle que la frontière de Poisson de  $(G, \mu)$  soit trivial. Rosenblatt [68] et Kaimanovich, Vershik [43] ont prouvé cette conjecture.

## 5.3 Exemples

Nous allons étudier deux exemples de groupes moyennables : le groupe des allumeurs de réverbères et le groupe de Baumslag-Solitar.

### 5.3.1 Le groupe des allumeurs de réverbères

Nous allons maintenant introduire le groupe des allumeurs de réverbères  $G_k$ . Ce groupe est défini comme étant le produit en couronne de  $\mathbb{Z}^k$  par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . On définit le produit direct de copies de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  indexé par  $\mathbb{Z}^k$  et noté  $\bigoplus_{\mathbb{Z}^k} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , appelé groupe additif des configurations de  $\mathbb{Z}^k$  à valeurs dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Un élément  $\varphi \in \bigoplus_{\mathbb{Z}^k} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est une application qui envoie  $\xi \in \mathbb{Z}^k$  vers  $\varphi(\xi) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et telle que  $\varphi(\xi) \neq 0$  pour au plus un nombre fini de  $\xi$ .

Le groupe  $\mathbb{Z}^k$  agit naturellement sur  $\bigoplus_{\mathbb{Z}^k} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  par décalage :

$$(T_{\xi_1} \varphi)(\xi_2) = \varphi(\xi_2 - \xi_1), \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{Z}^k, \quad \forall \varphi \in \bigoplus_{\mathbb{Z}^k} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Soit  $k \geq 1$ , on introduit le groupe des allumeurs de réverbères  $G_k$  comme le produit semi-direct :

$$G_k := \mathbb{Z}^k \ltimes \bigoplus_{\mathbb{Z}^k} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

La loi sur  $G_k$  est donnée par :

$$(\xi_1, \varphi_1)(\xi_2, \varphi_2) = (\xi_1 + \xi_2, \varphi_1 + T_{\xi_1}(\varphi_2)), \quad \forall (\xi_1, \varphi_1), (\xi_2, \varphi_2) \in G_k.$$

Expliquons la dénomination "groupes d'allumeurs de réverbères". Prenons le cas où  $k = 1$ . Imaginons une rue infinie indexée par les entiers relatifs. A chaque emplacement entier se trouve un lampadaire qui peut être allumé (il est alors dans l'état  $1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ) ou éteint (il est alors dans l'état  $0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ). Il n'y a néanmoins qu'un nombre fini de lampadaires allumés. Nous avons ainsi défini une configuration. Un élément de  $G_1$  correspond donc à un couple constitué d'un numéro d'emplacement et d'une telle configuration. En considérant l'action du shift  $T$  sur une configuration  $(\dots, 0, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ , on a :

$$T(\dots, 0, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots) = (\dots, 0, 0, 1, \dots, 1, 1, 0, \dots).$$

L'action de  $T$  sur une configuration se traduit par des extinctions et des allumages de lampes sur la rue.

**Proposition 5.25** *Les groupes  $G_k$  sont moyennables.*

*Preuve:* Le groupe  $G_k$  est une extension d'un groupe abélien par un groupe abélien, il est donc moyennable.  $\square$

**Proposition 5.26** [43] *Si  $k \geq 3$ , il existe une mesure de probabilité non dégénérée  $\mu$  sur  $G_k$  telle que la frontière de Poisson de  $(G_k, \mu)$  soit non triviale i.e.  $L^\infty(\Omega, \mathbb{P}_e)$  soit non trivial.*



### 5.3.2 Le groupe de Baumslag-Solitar

Nous donnons un exemple tiré de [40]. Dans ce dernier la frontière de Poisson du groupe de Baumslag-Solitar muni d'une mesure de proba est identifiée.

Soit  $p$  un entier naturel non nul. On définit  $BS(1, p)$  le groupe de Baumslag-Solitar comme étant le groupe engendré par deux générateurs  $a$  et  $b$  avec les relations  $aba^{-1} = b^p$ . Le groupe  $BS(1, p)$  coïncide avec le groupe affine de l'anneau  $\mathbb{Z} \left[ \frac{1}{p} \right] := \left\{ \frac{k}{p^l} \mid k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{N} \right\}$  et peut être représenté par le groupe des matrices :

$$(z, f) = \begin{pmatrix} p^z & f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } f = \frac{k}{p^l}.$$

Ici  $a = (1, 0)$  et  $b = (0, 1)$ . On notera  $\mathbb{Q}_p$  le corps des nombres  $p$ -adiques.

**Théorème 5.27** [40] *Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur le groupe  $BS(1, p)$  telle que son moment d'ordre 1 soit fini et telle que le groupe engendré par son support soit non abélien. Soit  $\bar{\mu}_{\mathbb{Z}}$  la moyenne de la mesure image de  $\mu$  sur  $\mathbb{Z}$  par l'application :*

$$BS(1, p) \ni (x, f) \mapsto x \in \mathbb{Z}.$$

1. *Si  $\bar{\mu}_{\mathbb{Z}} < 0$ , alors pour  $\mathbb{P}$ -presque toute trajectoire  $(x_n, \varphi_n)$  de la marche aléatoire  $(G, \mu)$ , il existe  $f_{\infty} \in \mathbb{R}$  tel que :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = f_{\infty}.$$

*La frontière de Poisson de  $(G, \mu)$  est isomorphe à  $\mathbb{R}$  muni d'une mesure limite résultante  $\lambda$ .*

2. *Si  $\bar{\mu}_{\mathbb{Z}} = 0$ , la frontière de Poisson de  $(G, \mu)$  est triviale.*
3. *Si  $\bar{\mu}_{\mathbb{Z}} > 0$ , alors pour  $\mathbb{P}$ -presque toute trajectoire  $(x_n, \varphi_n)$  de la marche aléatoire  $(G, \mu)$ , il existe  $f_{\infty} \in \mathbb{Q}_p$  tel que :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = f_{\infty}.$$

*La frontière de Poisson de  $(G, \mu)$  est isomorphe à  $\mathbb{Q}_p$  muni d'une mesure limite résultante  $\lambda$ .*





## Chapitre 6

# Frontière de Poisson d'une opération quantique

In this chapter, Poisson boundaries of unital quantum operations (also called Markov operators) are investigated. This chapter is based on the article "Noncommutative Poisson boundaries of quantum operations" [51] published in J. Math. Phys. 51, 052202 (2010) which is reproduced at chapter 9. Since any quantum operation can be dilated to its minimal isometric dilation, this enables us to identify theoretically its Poisson boundary. In the case of unital quantum channels, compact operators belonging to Poisson boundaries are characterized. Using the characterization of amenable groups by the injectivity of their von Neumann algebras, we will answer negatively some conjectures appearing in [4] about injectivity of the commuting algebra of the Kraus operators of unital quantum operations and their injective envelopes.

### 6.1 Introduction

Unital quantum operations, also known as Markov operators play a fundamental role in quantum information theory and in quantum measurement theory. In quantum information theory, they describe the transfer of quantum information from "Alice" to "Bob" [59, 44]. In quantum measurement theory, they describe quantum measurements on a physical system [50].

Let  $\mathcal{K}$  be a separable Hilbert space and  $B(\mathcal{K})$  be the von Neumann algebra of the bounded operators on  $\mathcal{K}$ . A quantum operation  $\Phi$  is defined by a normal completely positive map acting on  $B(\mathcal{K})$  which preserved the identity  $I_{\mathcal{K}}$  of  $B(\mathcal{K})$ . Our main interest is to described the set of the fixed points of a quantum operation, which is also called the **Poisson boundary** of  $\Phi$  :

$$\text{Fix}(\Phi) = \{X \in B(\mathcal{K}) : \Phi(X) = X\}.$$

This set has several meanings, for example in the case of quantum information theory it represents information unharmed by the operation. The Poisson boundary of a quantum operation is useful in the theory of error correction [12]. In the case of quantum measurement theory, this set contains stationary states of the quantum system under study [50, 47].

This papers is organized as follows. In section 6.2, we recall some properties of normal completely positive maps. In section 6.3, the general case is investigated : the Poisson boundary is equipped with a von Neumann algebra structure and the minimal isometric dilation of a quantum operation is used. This enables us to identify theoretically the

Poisson boundary. In section 6.4, the Poisson boundary in the case of a trace preserving quantum operation is studied. After gathering some known results, we identify elements of the Poisson boundary of a trace preserving quantum operation among compact operators. The section 9.4 deals with the non-commutative Poisson boundary associated with random walks on a discrete group. Finally, in the last section, the Poisson boundary of an amenable group is investigated : this allows us to answer negatively some conjectures about injectivity of the Kraus operators commutant of a quantum operation and its injective envelope in [4].

## 6.2 Some general properties

Let  $\Phi : B(\mathcal{K}) \ni x \rightarrow \Phi(x) \in B(\mathcal{K})$  be a normal completely positive map on  $B(\mathcal{K})$ . According to theorem 4.10, there exists a sequence  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  of  $B(\mathcal{K})$  such that :

$$\forall x \in B(\mathcal{H}), \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} T_i x T_i^*.$$

Denote  $\mathcal{A} := \text{span}\{T_i, T_i^*\}$  the linear space spanned by  $\{T_i, T_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ . where  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  is a family of **Kraus operators** for  $\Phi$ . The commutant  $\mathcal{A}'$  of  $\mathcal{A}$  is the set of elements of  $B(\mathcal{K})$  that commute with  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  and  $(T_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$  :

$$\mathcal{A}' := \{T_i, T_i^*\}'_{i \in \mathbb{N}}.$$

**Definition 6.1** Let  $\Phi$  be a normal completely positive map and  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  be a sequence as in theorem 4.10. We say that :

1.  $\Phi$  is **trace preserving** if  $\sum_{i=1}^{+\infty} T_i^* T_i = I_{\mathcal{K}}$ .
2.  $\Phi$  is **unital** if  $\Phi(I_{\mathcal{K}}) = I_{\mathcal{K}}$  i.e.  $\sum_{i=1}^{+\infty} T_i T_i^* = I_{\mathcal{K}}$ .

A normal completely positive map which is unital and trace preserving is called a **quantum channel**. A normal completely positive map which is unital, but not necessary trace preserving is called a **quantum operation** or a **Markov operator**. The terminology of Markov operator is relevant because it generalizes the commutative case, the above definition of a Markov operator coincides with the usual one. Let  $S$  be a countable set and regard  $l^\infty(S)$  as a von Neumann algebra acting on  $l^2(S)$  by multiplication. Denote  $\delta_s$  the Dirac function concentrating at  $s \in S$  defined by :

$$\delta_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } s = t \\ 0 & \text{if } s \neq t \end{cases}$$

For a Markov operator  $P$  as in definition 9.3,  $P(\delta_s)$  is a non-negative function of  $l^\infty(S)$  and there exist non-negative numbers  $p(t, s)$  such that :

$$\forall s, t \in S, \quad P(\delta_s)(t) =: p(t, s).$$

We have the equality in the strong operator topology :

$$\sum_{s \in S} \delta_s = I_S.$$

Because  $P$  is unital, we have :

$$\forall t \in S, \quad 1 = P(I_S)(t) = P\left(\sum_{s \in S} \delta_s\right)(t) = \sum_{s \in S} P(\delta_s)(t) = \sum_{s \in S} p(t, s).$$

We can expand every element  $f \in l^\infty(S)$  in the strong operator topology :  $f = \sum_{s \in S} f(s)\delta_s$ , hence we have :

$$P(f)(t) = P\left(\sum_{s \in S} f(s)\delta_s\right)(t) = \sum_{s \in S} f(s)P(\delta_s)(t) = \sum_{s \in S} p(t, s)f(s).$$

The last equality shows that  $P$  is a Markov operator in the classical sense.

**Definition 6.2 (Poisson boundary of a unital quantum operation)** *Let  $\Phi$  be a quantum operation, the Poisson boundary of  $\Phi$  is the set of fixed points of  $\Phi$  :*

$$\text{Fix}(\Phi) = \{X \in B(\mathcal{K}) : \Phi(X) = X\}.$$

**Proposition 6.3** *Let  $\Phi : B(\mathcal{K}) \ni x \rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} T_i x T_i^* \in B(\mathcal{K})$  be a quantum operation then the commutant of the Kraus operators of  $\Phi$ ,  $\mathcal{A}'$  is a von Neumann algebra, such that  $\mathcal{A}' \subset \text{Fix}(\Phi)$ .*

*Proof:* Let  $x \in \mathcal{A}'$ , thus  $\sum_{i=1}^{+\infty} T_i x T_i^* = \sum_{i=1}^{+\infty} T_i T_i^* x = I_{\mathcal{K}} x = x$ . Thus  $\mathcal{A}' \subset \text{Fix}(\Phi)$ .  $\mathcal{A}'$  is a von Neumann algebra as the commutant of a subset of  $B(\mathcal{H})$ .  $\square$

One of our purpose is to compare  $\mathcal{A}'$  and  $\text{Fix}(\Phi)$ . Under which conditions, do we have equality between these two sets ?

In order to study the general case, projections of  $B(\mathcal{K})$  that belong to the Poisson boundary of a unital quantum operation are characterized. These properties can be found in [15, 44] and are reproduced below for completeness.

**Lemma 6.4** [15] *Let  $\Phi : B(\mathcal{K}) \ni x \rightarrow \Phi(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} T_i x T_i^* \in B(\mathcal{K})$  be a unital quantum operation. Let  $p$  be a projection of  $B(\mathcal{K})$ . The following properties are equivalent :*

1.  $\exists \lambda \geq 0, \Phi(p) \leq \lambda p$ .
2.  $\forall i \in \mathbb{N}, T_i p = p T_i p$ .
3.  $\Phi(p) \leq p$ .

*Proof:* To show (1)  $\Rightarrow$  (2). Assume that there exists  $\lambda \geq 0$ , such that  $\Phi(p) \leq \lambda p$ , then

$$0 \leq (I_{\mathcal{K}} - p)\Phi(p)(I_{\mathcal{H}} - p) \leq (I_{\mathcal{K}} - p)\lambda p(I_{\mathcal{K}} - p) = 0.$$

This implies that :

$$0 = (I_{\mathcal{K}} - p)\Phi(p)(I_{\mathcal{K}} - p) = \sum_{i=1}^{+\infty} ((I_{\mathcal{K}} - p)T_i p T_i^* (I_{\mathcal{K}} - p)) = ((I_{\mathcal{K}} - p)T_i p)((I_{\mathcal{K}} - p)T_i p)^*.$$

Hence : for all  $i \in \mathbb{N}$ ,  $(I_{\mathcal{K}} - p)T_i p = 0$  i.e. for all  $i \in \mathbb{N}$ ,  $T_i p = p T_i p$ .

To show (2)  $\Rightarrow$  (3), assume that for all  $i \in \mathbb{N}$ ,  $T_i p = p T_i p$ . Then

$$\Phi(p) = \sum_{i=1}^{+\infty} T_i p T_i^* = \sum_{i=1}^{+\infty} p T_i p T_i^* p = p \Phi(p) p \leq \|\Phi(p)\| p \leq p.$$

The last inequality comes from the fact that  $\|\Phi\|_{\infty} \leq 1$ .

The implication (3)  $\Rightarrow$  (1) is obvious by taking  $\lambda = 1$ .  $\square$

**Corollary 6.5** [15] *Let  $\Phi : B(\mathcal{K}) \ni x \rightarrow \Phi(x) := \sum_{i=1}^{+\infty} T_i x T_i^* \in B(\mathcal{K})$  be a unital trace preserving quantum operation. The following properties are equivalent :*

1.  $\Phi(p) = p$ .
2.  $\forall i \in \mathbb{N}, T_i p = p T_i p$ .
3.  $\forall i \in \mathbb{N}, p T_i = p T_i p$ .

*Proof:* We remark that, since  $\Phi$  is trace preserving, the inequality  $\Phi(p) \leq p$  implies  $\Phi(p) = p$ . The equivalence is obtained from lemma 6.4.  $\square$

**Proposition 6.6** [15] *Let  $\Phi : B(\mathcal{K}) \ni x \rightarrow \Phi(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} T_i x T_i^* \in B(\mathcal{K})$  be a unital quantum operation. Let  $p$  be a projection of  $B(\mathcal{K})$ . The following properties are equivalent :*

1.  $\Phi(p) = p$ .
2.  $p \in \{T_i, T_i^*\}'_{i \in \mathbb{N}}$ .

*Proof:* (1)  $\Rightarrow$  (2) follows from the implication (1)  $\Rightarrow$  (2) of lemma 6.4 applied to  $p$  and  $I_{\mathcal{K}} - p$  (which is a fixed point of  $\Phi$ , because  $\Phi$  is unital) :

$$\forall i \in \mathbb{N}, T_i p = p T_i p \text{ and } T_i(I_{\mathcal{K}} - p) = (I_{\mathcal{K}} - p) T_i(I_{\mathcal{K}} - p).$$

Hence :

$$\forall i \in \mathbb{N}, T_i p = p T_i p = p T_i.$$

The implication (2)  $\Rightarrow$  (1) follows from the definition of  $\Phi$  and the fact that  $\sum_{i=1}^{\infty} T_i T_i^* = I_{\mathcal{K}}$ .  $\square$

**Theorem 6.7** [15] *Let  $\Phi : B(\mathcal{K}) \ni x \rightarrow \Phi(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} T_i x T_i^* \in B(\mathcal{K})$  be a unital quantum operation. The largest  $C^*$ -algebra contained in  $\text{Fix}(\Phi)$  is  $\{T_i, T_i^*\}'_{i \in \mathbb{N}}$ .*

*Proof:* Let  $\mathcal{B}$  a  $C^*$ -algebra contained in  $\text{Fix}(\Phi)$ . Then the weak-\* closure  $\overline{\mathcal{B}}$  of  $\mathcal{B}$  is a von Neumann algebra contained in  $\text{Fix}(\Phi)$ .  $\overline{\mathcal{B}}$  is the linear span of its projections and by proposition 6.6 :

$$\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{B}} \subset \{T_i, T_i^*\}'_{i \in \mathbb{N}}.$$

$\square$

**Corollary 6.8** [15] *Let  $\Phi : B(\mathcal{K}) \ni x \rightarrow \Phi(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} T_i x T_i^* \in B(\mathcal{K})$  be a unital quantum operation. If  $\text{Fix}(\Phi)$  is a subalgebra of  $B(\mathcal{K})$  then  $\text{Fix}(\Phi) = \{T_i, T_i^*\}'_{i \in \mathbb{N}}$ .*

*Proof:* Assume that  $\text{Fix}(\Phi)$  is an algebra. Then  $\text{Fix}(\Phi)$  is a von Neumann algebra because it is weak-\* closed and self-adjoint. As a von Neumann algebra is the linear span of its projections, proposition 6.6 implies that :

$$\text{Fix}(\Phi) = \{T_i, T_i^*\}'_{i \in \mathbb{N}}.$$

$\square$

If  $\text{Fix}(\Phi)$  turn out to be a  $C^*$ -subalgebra of  $B(\mathcal{K})$  then  $\text{Fix}(\Phi) = \mathcal{A}'$ . Unfortunately, it is not always the case. The next example due to Arveson shows that  $\text{Fix}(\Phi) \neq \mathcal{A}'$ .

**Example 6.9** [15, 44] *If  $\text{Fix}(\Phi)$  turn out to be a  $C^*$ -subalgebra of  $B(\mathcal{K})$  then  $\text{Fix}(\Phi) = \mathcal{A}'$ . Unfortunately, it is not always the case. We give a counter-example due to Arveson. For  $n \geq 3$  and  $\mathcal{K} = \mathbb{C}^n$ , we defined the normal unital completely positive map  $\Phi$  by :*

$$\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ni (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \mapsto \Phi((x_{ij})) := \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{n-1, n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sum_{k=1}^{n-1} x_{kk}}{n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

In this example, the Poisson boundary of  $\Phi$  is not an algebra for the matrix product.

$$\text{Fix}(\Phi) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k}{n} \end{pmatrix} \mid \forall 1 \leq k \leq n, a_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

### 6.3 Identification of the Poisson boundary and minimal isometric dilation

#### 6.3.1 The Poisson boundary as a von Neumann algebra

Although,  $\text{Fix}(\Phi)$  is not always a  $C^*$ -subalgebra of  $B(\mathcal{K})$ , a new product on  $\text{Fix}(\Phi)$  can be defined giving  $\text{Fix}(\Phi)$  a unique von Neumann algebra structure.

Recall that a linear subspace  $A \subset B(\mathcal{K})$  is by definition an **operator system** if  $A$  is closed under  $*$ -involution and contains scalar operators. Let  $A$  be an operator system in the von Neumann algebra  $B(\mathcal{K})$  and let  $E : B(\mathcal{K}) \rightarrow B(\mathcal{K})$  be a completely positive projection onto  $A$ , then  $A$  is a  $C^*$ -algebra with a new multiplication  $\circ$  defined by for all  $x, y \in A$ ,

$$x \circ y = E(xy).$$

Moreover if  $A$  is closed under the weak- $*$  topology,  $A$  is a von Neumann algebra. This fact was proved by Choi and Effros in [18] for operators systems on a von Neumann algebra.

In order to apply this result, let us define a completely positive projection of  $B(\mathcal{K})$  onto  $\text{Fix}(\Phi)$  as in [4]. We consider the Cesàro mean of  $(\Phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$E_N := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \Phi^n.$$

We remark that  $E_N$  is a completely bounded map and  $\|E_N\| \leq 1$ . As the unit ball of  $B(\mathcal{H})$  is compact for the weak- $*$  topology (Alaoglu theorem), the unit ball of completely bounded map is compact for point-weak topology. Thus there exists a subsequence  $E_{N_k}$  and a unital completely positive map  $E$  of  $B(\mathcal{H})$  such that for all  $x \in B(\mathcal{H})$ ,

$$E_{N_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{WOT}} E(x).$$

We have for all  $k \geq 2$ ,

$$\Phi E - E = (\Phi E - \Phi E_{N_k}) + (\Phi E_{N_k} - E_{N_k}) + (E_{N_k} - E).$$

The right side converges in the point-weak topology to 0 when  $k$  tends to  $+\infty$ . In fact for all  $n \geq 1$ ,

$$\|E_N - \Phi E_N\| = \frac{1}{N} \|\Phi - \Phi^{N+1}\| \leq \frac{2}{N}.$$

This implies that  $E_{N_k} - \Phi E_{N_k}$  converges uniformly to 0.

$\Phi E - \Phi E_{N_k} = \Phi(E - E_{N_k})$  converges in the point-weak topology to 0 when  $k$  tends to  $+\infty$  because  $\Phi$  is normal. Thus we have  $\Phi E = E$ .

We prove in the same way that  $E\Phi = E$ .

By induction, we get the equalities for all  $k \geq 1$ ,  $\Phi^k E = E\Phi^k = E$ . By definition of  $(E_N)_{N \in \mathbb{N}}$ , we have for all  $x \in B(\mathcal{K})$  and for all  $k \geq 1$  :

$$E_{N_k} E(x) = E(x).$$

When  $k$  tends to  $+\infty$ , we obtain that  $E$  is a projection of  $B(\mathcal{K})$ .

The equality  $\Phi E = \Phi$  implies  $\text{rank}(E) \subset \text{Fix}(\Phi)$ . Let  $x \in \text{Fix}(\Phi)$ , thus  $E_{N_k}(x) = x$ . Thus  $E(x) = x$  implying  $\text{Fix}(\Phi) \subset \text{rank}(E)$ . Choi-Effros theorem can be applied,  $\text{Fix}(\Phi)$  is a  $C^*$ -algebra with a new multiplication  $\circ$  defined by : for all  $x, y \in \text{Fix}(\Phi)$ ,

$$x \circ y = E(xy).$$

Since  $\text{Fix}(\Phi)$  is closed under the weak-\* topology,  $A$  is a von Neumann algebra. Uniqueness comes from the fact that every 2-positive isometry between von Neumann algebras is an isomorphism. Summarizing, the following result has been proved :

**Theorem 6.10** [6]/[35] *Let  $\Phi$  be a normal unital completely positive map. The Poisson boundary of  $\Phi$   $\text{Fix}(\Phi) := \{x \in B(\mathcal{H}) \mid \Phi(x) = x\}$  can be endowed with a product  $\circ$  such that  $\text{Fix}(\Phi)$  has a unique von Neumann algebra structure.*

Recall that a operator system  $A$  is **injective** if there exists a completely contractive projection from  $B(\mathcal{H})$  onto  $A$ .

**Proposition 6.11** [4] *Let  $\Phi : B(\mathcal{K}) \rightarrow B(\mathcal{K})$  be a normal unital completely positive map then the Poisson boundary of  $\Phi$  is injective.*

*Proof:* By considering the completely positive projection  $E$  in the last proof, we get a unital completely positive projection onto  $\text{Fix}(\Phi)$ . As  $\|E\|_{\text{cb}} = \|E(I_{\mathcal{K}})\| = \|I_{\mathcal{K}}\| = 1$ .  $E$  is completely contractive projection. By definition  $\text{Fix}(\Phi)$  is injective.  $\square$

**Corollary 6.12** [4] *Let  $\Phi : B(\mathcal{K}) \ni x \rightarrow \Phi(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} T_i x T_i^* \in B(\mathcal{K})$  be a unital quantum operation. If the commutant of Kraus operators  $\mathcal{A}'$  is not injective then  $\text{Fix}(\Phi) \neq \mathcal{A}'$ .*

### 6.3.2 Minimal isometric dilation of a quantum operation

Let  $\Phi$  be a normal unital completely positive map defined by a family of operators  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  of  $B(\mathcal{K})$  such that  $\Phi_T(x) := \sum_{i=1}^{+\infty} T_i x T_i^*$ . Let  $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$  the minimal isometric dilation of  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  as in theorem 3.4. We can define the normal unital completely positive map  $\Phi_V$  on  $B(\mathcal{H})$  by :

$$\Phi_V : B(\mathcal{H}) \ni x \mapsto \Phi_V(x) := \sum_{i=1}^{+\infty} V_i x V_i^*.$$

Thanks to Cuntz relations, the Poisson boundary of  $\Phi_V$  is easy to determine :

**Proposition 6.13** *Let  $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$  operators of  $B(\mathcal{H})$  carrying Cuntz relations. Let  $\Phi_V : B(\mathcal{H}) \ni x \mapsto \Phi_V(x) := \sum_{i=1}^{+\infty} V_i x V_i^*$ . Then,*

$$\text{Fix}(\Phi_V) = \{V_i, V_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}'.$$

*Proof:* We already know that,  $\{V_i, V_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}' \subset \text{Fix}(\Phi_V)$ . Let  $x \in \text{Fix}(\Phi_V)$ , then

$$\Phi_V(x) := \sum_{i=1}^{+\infty} V_i x V_i^* = x. \quad (6.1)$$

Let  $j \in \mathbb{N}$ , by multiplying both sides at the right by  $V_j$  and using a Cuntz relation  $V_i^* V_j = \delta_{i,j} I_{\mathcal{H}}$ , we have :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} V_i x V_i^* V_j &= x V_j, \\ \sum_{i=1}^{+\infty} V_i x \delta_{i,j} I_{\mathcal{H}} &= x V_j, \\ V_j x &= x V_j. \end{aligned}$$

We repeat the same calculation by multiplying (6.1) to the left by  $V_j^*$ . Thus  $\text{Fix}(\Phi_V) \subset \{V_i, V_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}'$ .  $\square$

In [15], Bratelli Jorgensen, Kishimoto and Werner have proven a relation between the Poisson boundary of a normal unital completely positive map and the Poisson boundary of its dilation :

**Théorème 6.14** [15] *The commutant of the representation  $\{V_i, V_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}'$  is isometrically order isomorphic to  $\text{Fix}(\Phi_T)$  the Poisson boundary of  $\Phi_T$ . This isomorphism is given by the compression of  $\mathcal{K}$  :*

$$\Lambda : \{V_i, V_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}' \ni x \longrightarrow \Lambda(x) := P_{\mathcal{K}} x P_{\mathcal{K}} \in \text{Fix}(\Phi_T),$$

where  $P_{\mathcal{K}}$  be the projection of  $\mathcal{H}$  onto  $\mathcal{K}$ .

The main result of this section is to precise this theorem by using the fact that  $\text{Fix}(\Phi_T)$  has a unique von Neumann algebra when it is embedded with a product (see 6.10).

**Theorem 6.15** *The Poisson boundary of a normal completely positive map on  $B(\mathcal{K})$ , as a von Neumann algebra can be identified with the Poisson boundary of its minimal isometric dilation, which is the commutant of its Kraus operators.*

*Proof:* We consider  $\Lambda : \text{Fix}(\Phi_V) \ni x \longrightarrow \Lambda(x) := P_{\mathcal{K}} x P_{\mathcal{K}} \in \text{Fix}(\Phi_T)$ . According to theorem 6.14 and 6.13,  $\Lambda$  is an isometric order isomorphism from  $\text{Fix}(\Phi_V)$  to  $\text{Fix}(\Phi_T)$ .  $\text{Fix}(\Phi_V) = \{V_i, V_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}'$  is a von Neumann algebra. Thus  $\Lambda$  transfers the algebra structure of  $\text{Fix}(\Phi_V)$  to  $\text{Fix}(\Phi_T)$ .  $\text{Fix}(\Phi_T)$  is embedded with a new product  $\star$  that give it an algebra structure : for all  $A, B \in \text{Fix}(\Phi_V)$ ,

$$(P_{\mathcal{K}} A P_{\mathcal{K}}) \star (P_{\mathcal{K}} B P_{\mathcal{K}}) := P_{\mathcal{K}} A B P_{\mathcal{K}}.$$

The fact that  $\Lambda$  an isometric order isomorphism implies that  $(\text{Fix}(\Phi_T), \star)$  is a von Neumann algebra. In fact for all  $A \in \text{Fix}(\Phi_V)$

$$\begin{aligned} \|(P_{\mathcal{K}} A P_{\mathcal{K}})^* \star (P_{\mathcal{K}} A P_{\mathcal{K}})\| &= \|(P_{\mathcal{K}} A^* P_{\mathcal{K}}) \star (P_{\mathcal{K}} A P_{\mathcal{K}})\| = \|P_{\mathcal{K}} A^* A P_{\mathcal{K}}\| \\ &= \|\Lambda(A^* A)\| = \|A^* A\| = \|A\|^2 = \|\Lambda(A)\| = \|P_{\mathcal{K}} A P_{\mathcal{K}}\|. \end{aligned}$$

This equality implies that  $(\text{Fix}(\Phi_T), \star)$  is a  $\mathcal{C}^*$ -algebra. As  $(\text{Fix}(\Phi_T), \star)$  is closed under the weak- $*$  topology. Thus  $\text{Fix}(\Phi_T)$  is isomorphic to the dual of a Banach space. According to Sakai theorem [72], this implies that  $(\text{Fix}(\Phi_T), \star)$  is a von Neumann algebra. Since any



positive map between  $C^*$ -algebra is completely positive,  $\Lambda$  is a von Neumann algebras isomorphism between  $\text{Fix}(\Phi_V)$  and  $\text{Fix}(\Phi_T)$ .  $\square$

From theorem 6.10 that  $(\text{Fix}(\Phi_T), \circ)$  has a unique von Neumann algebra (up to a completely order isomorphism). This implies that  $\star$  and  $\circ$  is the same operation up a completely order isomorphism [6].

**Remark 6.16** *Another proof of this theorem can be found in [7, 65].*

## 6.4 Quantum channels and trace preserving condition

Poisson boundaries of quantum operations which are trace preserving are now investigated. Recall that trace preserving quantum operations are called quantum channels.

### 6.4.1 The case of finite dimension

Poisson boundaries of quantum channels of finite dimension were identified by Kribs in [44] :

**Theorem 6.17** [44] *Let  $\mathcal{K}$  be a finite dimension Hilbert space and  $\Phi$  be a unital quantum channel then :*

$$\text{Fix}(\Phi) = \{T_i, T_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}' =: \mathcal{A}'.$$

This theorem can be applied in the case  $\mathcal{K} = \mathbb{C}^2$ . Completely positive map on  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  have been described in [69]. We introduce the Pauli basis of  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ,  $\{I_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$  is :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

It has been shown in [69], that a unital trace preserving completely positive map, also called qubit-channel,  $\Phi$  on  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  is equivalent to real diagonal maps on Pauli basis, up to two unitary conjugations. There exist  $U$  and  $V$  two unitaries and  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$  such that :

$$\forall x \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad \Phi(x) = U \left[ \hat{\Phi}(VxV^*) \right] U^*,$$

$$\hat{\Phi}(I_2) = I_2, \quad \hat{\Phi}(\sigma_x) = \lambda_1 \sigma_x, \quad \hat{\Phi}(\sigma_y) = \lambda_2 \sigma_y, \quad \hat{\Phi}(\sigma_z) = \lambda_3 \sigma_z,$$

where  $|\lambda_1| \leq 1, |\lambda_2| \leq 1, |\lambda_3| \leq 1$ . There are other technical conditions on the eigenvalues of  $\Phi$ , but we will not mention it here. For clarity, we will identify  $\Phi$  and  $\hat{\Phi}$ . Kribs has described the Poisson boundaries of qubit-channels in terms of its eigenvalues in [44] in the following way :

**Corollary 6.18 (The case of dimension 2)** [44] *Let  $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  be a quantum channel, then one of these assertions occurs :*

1. *If  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$  then  $\text{Fix}(\Phi) = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ . In this case  $\Phi$  is the identity map.*
2. *If for all  $k \in \{1, 2, 3\}$ ,  $\lambda_k \neq 1$  then  $\text{Fix}(\Phi) = \mathbb{C}I_2$ .*
3. *If exactly one of  $\lambda_k$  is equal to 1 then  $\text{Fix}(\Phi) = \text{span}\{|v_1\rangle\langle v_1|, |v_2\rangle\langle v_2|\}$  where  $(v_1, v_2)$  is an orthonormal basis for  $\mathbb{C}^2$ .*

### 6.4.2 The case of infinite dimension

Poisson boundaries restricted to trace-class operators of unital quantum channels were characterized in infinite dimension in [4] and the result is as follows :

**Theorem 6.19** [4] *Let  $\Phi : B(\mathcal{H}) \ni x \longrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} T_i x T_i^* \in B(\mathcal{H})$  be a unital quantum channel, then*

$$\{T_i, T_i^*\}' \cap B_1(\mathcal{K}) = \text{Fix}(\Phi) \cap B_1(\mathcal{K}),$$

where  $B_1(\mathcal{K})$  is the set of trace-class operators on  $\mathcal{K}$ .

The main result of this section is to identify elements of the Poisson boundary among the set of compact operators on  $\mathcal{K}$ . Let denote by  $B_0(\mathcal{K})$  this set.

**Theorem 6.20** *Let  $\Phi : B(\mathcal{K}) \ni x \longrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} T_i x T_i^* \in B(\mathcal{K})$  be a unital quantum channel, then*

$$\{T_i, T_i^*\}' \cap B_0(\mathcal{K}) = \text{Fix}(\Phi) \cap B_0(\mathcal{K}).$$

*Proof:* The idea of the proof is based on the proof in finite dimension [44]. The inclusion  $\{T_i, T_i^*\}' \subset \text{Fix}(\Phi)$  has already been seen. Hence we have the inclusion  $\{T_i, T_i^*\}' \cap B_0(\mathcal{K}) \subset \text{Fix}(\Phi) \cap B_0(\mathcal{K})$ .

Let show  $\text{Fix}(\Phi) \cap B_0(\mathcal{K}) \subset \{T_i, T_i^*\}' \cap B_0(\mathcal{K})$ . Let  $X \in \text{Fix}(\Phi) \cap B_0(\mathcal{K})$ , we notice by using the definition of  $\Phi$  that  $X^*$  is also a fixed point of  $\Phi$ . By writing  $X = \text{Re}(X) + i \text{Im}(X)$ , where  $\text{Re}(X) := \frac{X+X^*}{2}$  and  $\text{Im}(X) := \frac{X-X^*}{2i}$ .  $\text{Re}(X)$  and  $\text{Im}(X)$  are two self-adjoint operators that are fixed by  $\Phi$ . This decomposition allows us to assume that  $X$  is a compact self-adjoint operator. The spectral theorem applied on  $X$  gives :

$$X = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k P_k + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k Q_k,$$

where  $(\lambda_k)$  and  $(\mu_k)$  are respectively the sequence of positive eigenvalues and the sequence of negative eigenvalues of  $X$  such that for all  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < 0 < \lambda_k < \dots < \lambda_2 < \lambda_1,$$

where  $(P_k)$  and  $(Q_k)$  are the sequences of finite rank spectral projections associated respectively with the eigenvalues  $(\lambda_k)$  and  $(\mu_k)$ . Consider the positive self-adjoint operator  $Y := X + \|X\|_\infty I_{\mathcal{K}}$  which is in  $\text{Fix}(\Phi)$ . The spectral decomposition of  $Y$  is :

$$Y = \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k + \|X\|_\infty) P_k + \sum_{k=1}^{+\infty} (\mu_k + \|X\|_\infty) Q_k + \|X\|_\infty R_0,$$

where  $R_0$  is the spectral projection of  $X$  associated with 0.

Let show that for all  $k$ ,  $P_k \in \{T_i, T_i^*\}' \subset \text{Fix}(\Phi)$ . We denote by  $\mathcal{K}_k := \{\xi \in \mathcal{K} \mid Y\xi = (\lambda_k + \|X\|_\infty)\xi\}$  the eigenspace of  $Y$  associated with the eigenvalue  $\lambda_k + \|X\|_\infty$ . Let  $\xi \in \mathcal{K}_1$ ,

by using  $\|Y\xi\| \leq \|Y\|_\infty \|\xi\| = (\lambda_1 + \|X\|_\infty) \|\xi\|$  and Cauchy-Schwarz inequality,

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 + \|X\|_\infty) \langle \xi | \xi \rangle &= \langle Y\xi | \xi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{+\infty} T_i Y T_i^* \xi | \xi \right\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle T_i Y T_i^* \xi | \xi \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle Y T_i^* \xi | T_i^* \xi \rangle \\
&\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \|Y T_i^* \xi\| \|T_i^* \xi\| \leq \sum_{i=1}^{+\infty} (\lambda_1 + \|X\|_\infty) \|T_i^* \xi\| \|T_i^* \xi\| \\
&= (\lambda_1 + \|X\|_\infty) \sum_{i=1}^{+\infty} \langle T_i^* \xi | T_i^* \xi \rangle = (\lambda_1 + \|X\|_\infty) \left\langle \xi | \sum_{k=1}^{+\infty} T_k T_k^* \xi \right\rangle \\
&= (\lambda_1 + \|X\|_\infty) \langle \xi | \xi \rangle.
\end{aligned}$$

We deduce that all inequalities are equalities. By using the case of equality in Cauchy-Schwarz inequality, we obtain for all  $i \in \mathbb{N}$

$$Y T_i^* \xi = (\lambda_1 + \|X\|_\infty) T_i^* \xi.$$

Thus for all  $i \in \mathbb{N}$ ,  $T_i^* \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_1$ . Hence

$$\forall i \in \mathbb{N}, T_i^* P_1 = P_1 T_i^* P_1 \text{ i.e. } P_1 T_i = P_1 T_i P_1. \quad (6.2)$$

Let define the unital quantum channel  $\Phi^* : B(\mathcal{K}) \ni x \longrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} T_i^* x T_i \in B(\mathcal{K})$ . We remark by using (9.1) :

$$\Phi^*(P_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} T_i^* P_1 T_i = \sum_{i=1}^{+\infty} P_1 T_i^* P_1 T_i P_1 = P_1 \Phi^*(P_1) P_1 \leq P_1 \Phi^*(I_{\mathcal{K}}) P_1 = P_1.$$

As  $P_1$  and  $\Phi^*(P_1)$  are positive trace-class operators (because  $P_1$  is finite rank) and  $\text{tr}(\Phi^*(P_1)) = \text{tr}(P_1)$ , we deduce that :

$$\Phi^*(P_1) = P_1.$$

This equality implies  $\Phi^*(I_{\mathcal{K}} - P_1) = I_{\mathcal{K}} - P_1$ . We remark that for all  $i \in \mathbb{N}$

$$0 \leq (P_1 T_i^* (I_{\mathcal{K}} - P_1)) (P_1 T_i^* (I_{\mathcal{K}} - P_1))^* = P_1 T_i^* (I_{\mathcal{K}} - P_1) T_i P_1.$$

By summing the right side for  $i \in \mathbb{N}$ , we get :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P_1 T_i^* (I_{\mathcal{K}} - P_1) T_i P_1 = P_1 \Phi^*(I_{\mathcal{K}} - P_1) P_1 = P_1 (I_{\mathcal{K}} - P_1) P_1 = 0$$

Thus for all  $i \in \mathbb{N}$ ,  $P_1 T_i^* (I_{\mathcal{K}} - P_1) = 0$ , this gives :

$$\forall i \in \mathbb{N}, T_i P_1 = P_1 T_i P_1. \quad (6.3)$$

By using (9.1) and (9.2), we have :

$$P_1 \in \{T_i, T_i^*\}' \subset \text{Fix}(\Phi).$$

By considering  $Y - (\lambda_1 + \|X\|_\infty) P_1$  which is a fixed point of  $\Phi$ , we show in the same way that  $P_2 \in \{T_i, T_i^*\}' \subset \text{Fix}(\Phi)$ . A recurrence proves that for all  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$P_k \in \{T_i, T_i^*\}'.$$

This implies that  $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k P_k \in \{T_i, T_i^*\}' \subset \text{Fix}(\Phi)$ . Hence the positive compact operator  $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k P_k - X = -\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k Q_k$  is also in  $\text{Fix}(\Phi)$ . We apply the same technique to prove that for all  $k \in \mathbb{N}$ ,  $Q_k \in \{T_i, T_i^*\}' \subset \text{Fix}(\Phi)$ . We conclude that  $X \in \{T_i, T_i^*\}'$ .  $\square$

A example due to Arias, Gheonda and Gudder shows there exists normal unital completely positive maps which are trace preserving such that its Poisson boundary is different from  $\mathcal{A}'$ .

**Example 6.21** [4] *Let  $\mathbb{F}_2$  be the free group on two generators  $g_1$  and  $g_2$ . Let*

$$\mathcal{K} := l^2(\mathbb{F}_2) = \left\{ f : \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{h \in \mathbb{F}_2} |f(h)|^2 < +\infty \right\}.$$

For  $h \in \mathbb{F}_2$ , we define  $\delta_h : \mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{C}$  by :

$$\delta_h(h') = \begin{cases} 1 & \text{if } h = h' \\ 0 & \text{if } h \neq h' \end{cases}$$

$\{\delta_h \mid h \in \mathbb{F}_2\}$  is an orthonormal basis for  $\mathcal{K}$ . Let  $g \in \mathbb{F}_2$ , we can define the right regular representation of  $\mathbb{F}_2$  on  $l^2(\mathbb{F}_2)$ , which is denoted  $\rho(g)$  :

$$\forall h \in \mathbb{F}_2, \rho(g) : l^2(\mathbb{F}_2) \ni \delta_h \mapsto \delta_{gh} \in l^2(\mathbb{F}_2).$$

Notice that for all  $g \in \mathbb{F}_2$ ,  $\rho(g)$  is a unitary operator whose inverse is  $\rho(g^{-1})$ . Let consider  $\Phi$  defined by :

$$\Phi : B(l^2(\mathbb{F}_2)) \ni x \longmapsto \Phi(x) := \frac{1}{2}\rho(g_1)x\rho(g_1^{-1}) + \frac{1}{2}\rho(g_2)x\rho(g_2^{-1}) \in B(l^2(\mathbb{F}_2)).$$

Since  $\frac{1}{2}\rho(g_1)\rho(g_1^{-1}) + \frac{1}{2}\rho(g_2)\rho(g_2^{-1}) = \frac{1}{2}\rho(g_1^{-1})\rho(g_1) + \frac{1}{2}\rho(g_2^{-1})\rho(g_2) = I_{l^2(\mathbb{F}_2)}$ ,  $\Phi$  is unital and trace preserving. By applying theorem 9.2 to  $T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(g_1)$ ,  $T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(g_2)$  and for all  $i > 2$ ,  $T_i = 0$ ,  $\Phi$  is a normal completely positive maps. As  $\mathbb{F}_2$  is a non amenable, it implies that  $\mathcal{A} := \text{span}(\rho(g_1), \rho(g_1^{-1}), \rho(g_2), \rho(g_2^{-1}))$  and  $\mathcal{A}' := \{\rho(g_1), \rho(g_1^{-1}), \rho(g_2), \rho(g_2^{-1})\}'$  are non injective.

We can use corollary 6.12 and concludes that :

$$\text{Fix}(\Phi) \neq \mathcal{A}'.$$

In [4], an explicit element which is in  $\text{Fix}(\Phi)$  and not in  $\mathcal{A}'$  is given.

In this example, a normal completely positive map is introduced by using the action of the free group  $\mathbb{F}_2$ . This example leads us to a generalization to any discrete group. This gives us a interesting class of unital quantum channels.

## 6.5 Poisson boundaries of a discrete group

The purpose of this section is to give a class of unital quantum channels based on the study of Poisson boundaries associated with random walks on a discrete group.

### 6.5.1 The right convolution operator

Let  $G$  be a discrete group and  $\mu$  a probability measure on  $G$ .

Consider the **right convolution operator**  $\phi_\mu : l^\infty(G) \rightarrow l^\infty(G)$  defined by :

$$\phi_\mu(f)(h) = \sum_{g \in G} \mu(g) f(hg), \quad \forall f \in l^\infty(G), \forall h \in G. \quad (6.4)$$

The operator  $\phi_\mu$  describes a random walk on the group  $G$  where the transition probability from  $\gamma \in G$  to  $\sigma \in G$  is  $\mu(\gamma^{-1}\sigma)$ . The Poisson boundary of  $\phi_\mu$  is the space of  $\mu$ -harmonic functions in  $L^\infty(G)$  :

$$\text{fix}(\phi_\mu) := \left\{ f \in l^\infty(G) \mid \forall h \in G, \sum_{g \in G} \mu(g) f(hg) = f(h) \right\},$$

it is the set of fixed points of  $\phi_\mu$ .

Now we regard  $l^\infty(G)$  as a von Neumann subalgebra of  $B(l^2(G))$  as multiplication operators  $l^\infty(G) \ni f \rightarrow M_f \in B(l^2(G))$  such that :

$$\forall f_1 \in l^2(G), \quad M_f(f_1) = f_1 f.$$

We can extend  $\phi_\mu$  to  $B(l^2(G))$ . We denote  $\Phi_\mu$  the non-commutative extension of  $\phi_\mu$  :

$$\Phi_\mu : B(l^2(G)) \ni x \mapsto \Phi_\mu(x) := \sum_{g \in G} \mu(g) \rho(g) x \rho(g^{-1}) \in B(l^2(G)),$$

where  $\rho : l^2(G) \rightarrow l^2(G)$  is the right regular representation of  $G$  defined by : for all  $g \in G$ ,  $f \in l^2(G)$ ,

$$\rho(g)(f)(x) = f(xg).$$

**Proposition 6.22** *The map  $\Phi_\mu$  is a unital quantum channel.*

*Proof:* According to 4.10,  $\Phi_\mu$  is a normal completely positive map of  $B(l^2(G))$ . A set of Kraus operators is  $\left\{ \sqrt{\mu(g)} \rho(g), \sqrt{\mu(g^{-1})} \rho(g^{-1}) \mid g \in \text{supp}(\mu) \right\}$ . Moreover since for all  $g \in G$ ,  $\rho(g)$  is unitary whose inverse is  $\rho(g^{-1})$ , we have :

$$\sum_{g \in G} \mu(g) \rho(g) \rho(g^{-1}) = \sum_{g \in G} \mu(g) \rho(g^{-1}) \rho(g) = I_{l^2(G)}.$$

Thus the map  $\Phi_\mu$  is unital and trace preserving. □

The link between  $\Phi_\mu$  and  $\phi_\mu$  is given by the relation for all  $f \in l^\infty(G)$ ,

$$\Phi_\mu(M_f) = M_{\phi_\mu(f)}.$$

We deduce :

**Proposition 6.23** *Let  $f \in l^\infty(G)$ , a function  $f$  is an element of  $\text{fix}(\phi_\mu)$  if and only if the multiplication operator  $M_f$  is an element of  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$ .*

By using this proposition, the function  $f \in l^\infty(G)$  and the operator  $M_f \in B(l^2(G))$  can be identified. The Poisson boundary of  $\Phi_\mu$  restricted to  $l^\infty(G)$  is :

$$\text{fix}(\phi_\mu) = \text{Fix}(\Phi_\mu) \cap l^\infty(G).$$

### 6.5.2 The commuting algebra of Kraus operators of $\Phi_\mu$

If  $S$  is a subset of  $B(\mathcal{K})$ , we denote  $W^*(S)$  the von Neumann algebra spanned by  $S$ . Let  $R(G) := W^*\{\rho(g) | g \in G\}$  and  $L(G) := W^*\{\lambda(g) | g \in G\}$  where  $\lambda : l^2(G) \rightarrow l^2(G)$  is the left regular representation of  $G$  on  $l^2(G)$  defined by : for all  $g \in G$ ,  $f \in l^2(G)$ ,

$$\lambda(g)(f)(x) = f(g^{-1}x).$$

There are relations between these two sets [21] :

$$R(G)' = L(G) \text{ and } L(G)' = R(G).$$

**Proposition 6.24** *Let  $H$  be the subgroup of  $G$  generated by  $\text{supp}\{\mu\}$ . Consider the quotient of  $G$  by  $H$ ,  $H \backslash G = \bigsqcup_{t \in T} tH$ , where  $T$  is a system of representatives for the right cosets in  $H \backslash G$ . then :*

$$\mathcal{A}' \approx L(H) \otimes B(l^2(T)).$$

*Proof:* As  $H \backslash G = \bigsqcup_{t \in T} tH$ , we have the following identifications between Hilbert spaces :

$$l^2(G) = \bigoplus_{t \in T} l^2(tH) \approx \bigoplus_{t \in T} l^2(H) \approx l^2(H) \otimes l^2(T).$$

With the first identification, we have

$$l^2(G) \ni f \rightarrow \sum_{t \in T} f \mathbb{1}_{tH} = \sum_{t \in T} f_t \in \bigoplus_{t \in T} l^2(H),$$

where for all  $t \in T$ ,  $f_t := f \mathbb{1}_{tH}$ .

We denote  $\rho_G : l^2(G) \rightarrow l^2(G)$  the right regular representation of  $G$  and  $\rho_H : l^2(H) \rightarrow l^2(H)$  the right regular representation of  $H$ . For all  $f \in l^2(G)$ ,  $h \in H$ ,

$$\rho_G(h)f = \sum_{t \in T} \rho_G(h)f_t = \sum_{t \in T} \rho_H(h)f_t \approx (\rho_H(h) \otimes I_{l^2(T)}) f.$$

From this, we deduce that :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= \left\{ \sqrt{\mu(g)}\rho(g), \sqrt{\mu(g^{-1})}\rho(g^{-1}) \mid g \in \text{supp}(\mu) \right\}' = \{\rho_G(g) \mid g \in H\}' \\ &= \{\lambda_H(h) \otimes I_{l^2(T)} \mid h \in H\}' \approx L(H) \otimes B(l^2(T)), \end{aligned}$$

where  $\lambda_H : l^2(H) \rightarrow l^2(H)$  is the left regular representation of  $H$ . □

The support of  $\mu$  is denoted  $\text{supp}\{\mu\}$ . In the case where the support  $\text{supp}\{\mu\}$  of  $\mu$  generates  $G$ , the probability measure  $\mu$  is said to be **adapted** to  $G$ .

**Corollaire 6.25** *If the probability measure  $\mu$  is adapted to  $G$ , then :*

$$\mathcal{A}' = L(G).$$

It is known (see [41, 38]) that the Poisson boundary of  $\phi_\mu$  can be identified with  $L^\infty(\Omega, \nu)$  for some probability space  $(\Omega, \nu)$ .

We have both inclusions :

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega, \nu) \approx \text{fix } \phi_\mu &\subset \text{Fix}(\Phi_\mu) \\ L(G) &\subset \text{Fix}(\Phi_\mu) \end{aligned}$$

On the other hand, Izumi showed that the Poisson boundary of  $\Phi_\mu$  can be naturally identified with the crossed product  $L^\infty(\Omega, \nu) \rtimes G$  in [35].

**Proposition 6.26** *Assume that the probability measure  $\mu$  is adapted to  $G$  and that  $\text{fix}(\phi_\mu) \neq \mathbb{C}1_G$ , that is the Poisson boundary of  $\phi_\mu$  is non-trivial. Then :*

$$\mathcal{A}' \neq \text{Fix}(\Phi_\mu).$$

*Proof:* Let  $f \in l^\infty(G)$  be a non constant function in the Poisson boundary of  $\phi_\mu$ . According to 6.23, the multiplication operator  $M_f : l^2(G_k) \ni l \rightarrow fl \in l^2(G_k)$  is an element of  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$ . Let us prove that  $M_f \notin L(G)$ .

Assume that  $M_f \in L(G) = \mathcal{A}'$ , then  $M_f$  commutes with all  $(\rho(g))_{g \in G}$  :

$$M_f \rho(g) = \rho(g) M_f, \quad \forall g \in G.$$

We apply this equality to the function equal to 1 on  $G$  :

$$f(x) = f(gx), \quad \forall g, x \in G,$$

This shows that  $f$  is constant on  $G$  which is a contradiction. Thus  $\mathcal{A}' \neq \text{Fix}(\Phi_\mu)$ .  $\square$

**Example 6.27** *Let  $G$  be a non-amenable group equipped with an adapted probability measure. Then  $\text{fix}(\phi_\mu) \neq \mathbb{C}1_G$  (see proposition 7.1 in [9] page 77). For instance, let  $\mathbb{F}_k$  be the free group with  $k$  generators  $a_1, \dots, a_k$  for  $k \geq 2$ . We define a probability measure  $\mu$  on  $\mathbb{F}_k$  defined by  $\mu = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \delta_{a_j}$ . Since the group  $\mathbb{F}_k$  is non-amenable and the probability measure  $\mu$  is adapted to  $\mathbb{F}_k$ , we have :*

$$\mathcal{A}' \neq \text{Fix}(\Phi_\mu).$$

**Proposition 6.28** [73] *If the probability measure  $\mu$  is adapted to  $G$ , then  $\mathcal{A}' = L(G)$  is injective, if and only if the group  $G$  is amenable.*

Before studying, the Poisson boundary of  $\Phi_\mu$ , we will study the Poisson boundary of  $\Phi_\mu$  restricted to  $l^\infty(G)$ . By using the above identification,  $\text{Fix}(\Phi_\mu) \cap l^\infty(G) = \{M_f \in B(l^2(G)) \mid f \in l^\infty(G), \phi_\mu(f) = f\}$ .

## 6.6 A counter-example to two conjectures

In [4], Arias, Gheonda and Gudder compare the commutant of Kraus operators of a unital quantum operation and its Poisson boundary. They stated the following natural conjectures :

**Conjecture 6.29** *Let  $\Phi$  be a unital quantum operation, let  $\mathcal{A}'$  be the commutant of Kraus operators of  $\Phi$ . If  $\mathcal{A}'$  is injective then  $\text{Fix}(\Phi) = \mathcal{A}'$ .*

**Conjecture 6.30** *Let  $\Phi$  be a unital quantum operation and  $\mathcal{A}'$  the commutant of Kraus operators of  $\Phi$ . Then  $\text{Fix}(\Phi)$  the injective envelope of  $\mathcal{A}'$ .*

We will answer negatively to these conjectures by using a Markov operator on the lamplighter groups and results from section 6.5.

### 6.6.1 Properties of lamplighter groups

Let  $k \geq 1$  be an integer. Let  $G_k$  be the lamplighter groups  $G_k$  defined in 5.3.1

Let  $G_k$  be the lamplighter group and let  $\mu$  be an adapted probability measure on  $G_k$ . We define the unital quantum operation  $\Phi_\mu$  as in section 9.4 :

$$\Phi_\mu : B(l^2(G_k)) \ni x \longmapsto \Phi_\mu(x) := \sum_{g \in G_k} \mu(g) \rho(g) x \rho(g^{-1}) \in B(l^2(G_k)),$$

where  $\rho$  is the right regular representation of  $G_k$  on  $l^2(G_k)$ .

**Theorem 6.31** *Let  $k \geq 3$ . There exists a non-degenerate probability measure  $\mu$  on  $G_k$  such that  $\mathcal{A}'$  is injective and  $\text{Fix}(\Phi_\mu) \neq \mathcal{A}'$ .*

*Proof:* It is proved in Proposition 6.1 of [43] that there exists a non-degenerate probability measure  $\mu$  on  $G_k$  such that the Poisson boundary of  $\Phi_\mu$  restricted to  $l^\infty(G_k)$  is non trivial i.e.  $L^\infty(\Omega, \nu)$  is non trivial.

According to Proposition 6.26, this shows that  $\text{Fix}(\Phi_\mu) \neq \mathcal{A}'$ .

Moreover as an extension of amenable (in fact abelian) groups,  $G_k$  is an amenable group. Hence Proposition 6.28 implies that  $L(G_k)$  the von Neumann algebra generated by the left regular representation of  $G_k$  on  $l^2(G_k)$  is injective. Thus  $\mathcal{A}' = L(G_k)$  is injective and  $\text{Fix}(\Phi_\mu) \neq \mathcal{A}'$ .  $\square$

With the above proposition, we answer to the negative to the first Conjecture 6.29. In the case of lamplighter group, the injective envelope of  $\mathcal{A}'$  is not  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$ . In fact, the injective envelope of  $\mathcal{A}'$  coincides with  $\mathcal{A}'$ , since  $\mathcal{A}'$  is injective. However as seen in Theorem 6.31,  $\mathcal{A}' \neq \text{Fix}(\Phi_\mu)$ . This gives a negative answer to Conjecture 6.30.





## Chapitre 7

# Frontière de Poisson d'un groupoïde $s$ -discret

La notion de groupoïde a été introduite en 1926 par Brandt lors de l'étude de la composition de formes quadratiques à quatre variables [13]. La notion de groupoïde étend la notion de groupe. Heuristiquement, un groupoïde est un ensemble muni d'un produit qui n'est pas défini pour toutes les paires d'éléments de ce dernier. Les groupoïdes interviennent dans divers domaines des mathématiques : en géométrie algébrique dans l'étude des espaces de modules, en topologie algébrique avec l'introduction du groupoïde fondamental d'un espace topologique, dans la théorie des opérateurs où les groupoïdes permettent de définir de nouvelles  $C^*$ -algèbres... Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la frontière de Poisson d'un groupoïde discret dans le cadre commutatif puis non-commutatif.

### 7.1 Généralités

Les notions de base sur les groupoïdes qui suivent ont pour références [1, 39, 74].

**Définition 7.1** *Un groupoïde est une petite catégorie  $G$  dans laquelle tout morphisme est un isomorphisme. Ceci est équivalent à la donnée :*

1. *d'un ensemble d'objets (dit aussi ensemble des unités) :*

$$\text{Obj } G = G^{(0)},$$

*et d'un ensemble de morphismes :*

$$\text{Mor } G \approx G,$$

*(que l'on notera tout simplement  $G$ ) munis de deux applications*

$$s, t : G \rightarrow G^{(0)}$$

*appelées respectivement application source et cible ("target" en anglais).*

*On note  $G^{(2)}$  l'ensemble des paires composables défini par :*

$$G^{(2)} = \{(g_1, g_2) \in G \times G \mid s(g_1) = t(g_2)\}.$$

2. *d'une application de composition est :*

$$G^{(2)} \ni (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 \in G$$

qui vérifie pour tout  $(g_1, g_2) \in G^{(2)}$ ,

$$t(g_1 g_2) = t(g_1) \quad \text{et} \quad s(g_1 g_2) = s(g_2).$$

3. d'une application

$$\epsilon : G^{(0)} \ni x \mapsto \epsilon_x \in G,$$

qui à tout objet  $x \in G^{(0)}$  associe l'automorphisme identité  $\epsilon_x$  telle que :

$$s(\epsilon_x) = t(\epsilon_x) = x.$$

4. de la propriété suivante, pour tout  $g \in G$ , il existe un unique élément  $g^{-1} \in G$  tel que :

$$s(g^{-1}) = t(g), \quad t(g^{-1}) = s(g).$$

$$g g^{-1} = \epsilon_{t(g)}, \quad g^{-1} g = \epsilon_{s(g)}.$$

Donnons quelques exemples de groupoïdes :

**Exemple 7.2** Tout groupe  $G$  est un groupoïde. Il suffit de considérer le produit sur  $G$ . On a  $G^{(2)} = G \times G$  et  $G^{(0)}$  est réduit à un point qui est l'identité du groupe.

**Exemple 7.3** Soit  $X$  un ensemble et  $G = X \times X$  avec  $G^{(2)} = \{((z, y), (y, x)) \in G \times G\}$  et  $(z, y)(y, x) = (z, x)$ . L'ensemble des unités correspond donc à la diagonale  $\{(x, x) \in G \times G \mid x \in X\}$  que l'on identifie à  $X$ . On a donc  $(y, x)^{-1} = (x, y)$  et

$$s(y, x) = x \quad \text{et} \quad t(x, y) = y.$$

**Exemple 7.4** Soit  $\Gamma$  un groupe agissant sur un ensemble  $X$ . L'ensemble  $G = \Gamma \times X$  est un groupoïde telle que :

$$G^{(2)} := \{((g, hx), (h, x)) \in G \times G \mid g, h \in \Gamma, x \in X\},$$

avec la relation  $(g, hx)(h, x) = (gh, x)$ . L'ensemble  $X$  est identifié à  $\{e\} \times X$  et on a de plus :

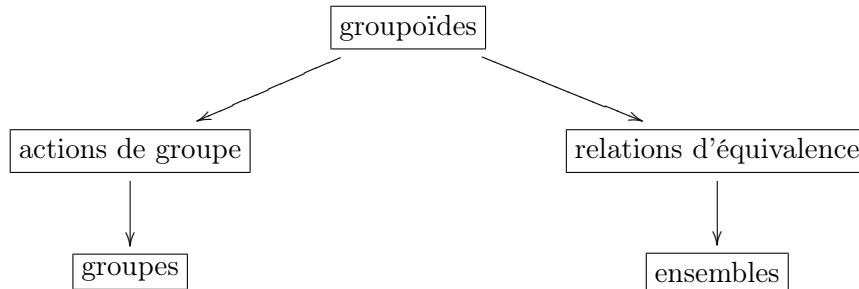
$$(g, x)^{-1} = (g^{-1}, gx), \quad s(g, x) = x, \quad t(g, x) = gx.$$

**Exemple 7.5** Soit  $X$  un ensemble muni d'une relation d'équivalence notée " $\sim$ ". Soit  $G$  le graphe de cette relation d'équivalence et définissons  $G^{(2)} = \{((z, y), (y, x)) \in G \times G\}$  et  $(z, y)(y, x) = (z, x)$ . Ainsi  $G$  est un groupoïde muni du produit :

$$(z, y)(y, x) = (z, x).$$

L'ensemble  $X$  s'identifie à  $G^{(0)}$ . Cet exemple est un cas plus général de l'exemple 7.3.

Résumons ces exemples avec un graphe :



**Définition 7.6** Soit  $G$  un groupoïde. On note  $X = G^{(0)}$  l'ensemble des unités de ce dernier. Pour tout  $x \in X$ , on définit :

$$G^x = t^{-1}(\{x\}), \quad G_x = s^{-1}(\{x\}), \quad G_x^x = G^x \cap G_x.$$

### 7.1.1 Groupoïdes mesurables

**Définition 7.7** On dit qu'un groupoïde  $G$  est **borélien** si  $G$  est muni d'une tribu telle que les applications  $s, t, G^{(2)} \ni (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 \in G$  et  $G \ni g \mapsto g^{-1} \in G$  soient mesurables lorsque  $G^{(2)}$  est muni de la structure borélienne induite par  $G \times G$ .

Considérons les éléments  $g \in G$  et  $h \in G^{s(g)}$ , on a :

$$s(h) \xrightarrow{h} s(g) \xrightarrow{g} t(g)$$

Remarquons que l'application

$$G^{s(g)} \ni h \mapsto gh \in G^{t(g)}$$

est une bijection.

**Définition 7.8** On appelle **système de mesures de Haar** sur un groupoïde borélien  $G$  une famille de mesures  $(\lambda^x)$  sur les fibres  $G^x \subset G$  de l'application cible  $t : G \rightarrow G^{(0)}$  :

1. invariante par  $G$  au sens suivant :

$$g\lambda^{s(g)} = \lambda^{t(g)}, \quad \forall g \in G,$$

2. concentrée sur les fibres  $G^x$ , c'est-à-dire vérifiant pour tout  $x \in G^{(0)}$ ,

$$\lambda^x(G - G^x) = 0.$$

Une mesure sur  $G$  est dite quasi-symétrique si elle est quasi-invariante par rapport à l'application  $g \mapsto g^{-1}$ . On peut intégrer un système de mesures boréliennes  $\lambda = (\lambda^x)$  sur les fibres de l'application cible  $t : G \rightarrow G^{(0)}$  par rapport à une mesure  $\nu$  sur  $G^{(0)}$ . Ceci nous donne une mesure  $\lambda \star \nu$ . On dit que la mesure  $\nu$  est quasi-invariante par rapport au système de mesures  $\lambda$ , si  $\lambda \star \nu$  est quasi-symétrique.

**Définition 7.9** Une famille de mesures  $(\lambda^x)_{x \in G^{(0)}}$  sur  $G$  est dite **borélienne**, si pour toute fonction borélienne positive  $f$  sur  $G$ , la fonction :

$$\lambda(f) : G^{(0)} \ni x \mapsto \lambda^x(f),$$

est mesurable. Une telle famille est dite **propre**, s'il existe une fonction mesurable  $f$  telle que  $\lambda(f) = 1$ .

**Définition 7.10** Un groupoïde **mesuré** est un triplet  $(G, \lambda, \nu)$  où  $G$  est un groupoïde borélien,  $\lambda$  est un système de Haar borélien et  $\nu$  est une mesure sur  $G^{(0)}$  quasi-invariante par rapport à  $\lambda$ .

### 7.1.2 Opérateur de Markov invariant sur un groupoïde borélien

**Définition 7.11** Un opérateur de Markov sur un groupoïde borélien  $G$  défini par les probabilités de transition  $(\mu^g)_{g \in G}$  est dit **invariant**, s'il vérifie :

1. pour tout  $g \in G$ , la probabilité de transition  $\mu^g$  est concentrée sur sa fibre correspondante  $G^{s(g)}$ ,

$$\mu^g(G^{s(g)}) = 1.$$

2. pour tout  $(g', g) \in G^{(2)}$ ,

$$\mu^{g'g} = g' \mu^g.$$

**Proposition 7.12** [39] *Tout système borélien de mesures de probabilité sur les fibres  $(G^x)_{x \in G^{(0)}}$  se prolonge de manière unique en un système de probabilités de transition d'un opérateur de Markov invariant sur  $G$ .*

*Preuve:* Soit  $(\mu^x)_{x \in G^{(0)}}$  un système borélien de mesures de probabilité sur les fibres  $(G^x)_{x \in G^{(0)}}$ . On définit pour tout  $g \in G$ , la probabilité de transition  $\mu^g$  par :

$$\mu^g := g \mu^{s(g)},$$

la probabilité de transition  $\mu^g$  est bien portée par  $G^{s(g)}$ . On a alors pour tout  $(g', g) \in G^{(2)}$ ,

$$\mu^{g'g} = (g'g) \mu^{s(g'g)} = g'(g \mu^{s(g)}) = g' \mu^g.$$

Ceci montre que le système est bien  $G$ -invariant. On remarque enfin que  $(\mu^g)_{g \in G}$  est bien un système borélien.  $\square$

Soit  $(G, \lambda, \nu)$  un groupoïde mesuré. Soit  $\mu = (\mu^x)_{x \in G^{(0)}}$  une famille borélienne de mesures de probabilité sur  $G^{(0)}$  indexée par les points  $x \in G^{(0)}$ . L'opérateur de Markov associé à la famille de mesures de probabilité  $(\mu^x)_{x \in G^{(0)}}$  sur les fibres  $(G^x)_{x \in G^{(0)}}$  est représenté par l'application :

$$\phi_\mu : L^\infty(G, \lambda \star \nu) \rightarrow L^\infty(G, \lambda \star \nu)$$

définie de la façon suivante : pour tout  $f \in L^\infty(G, \lambda \star \nu)$  et pour tout  $h \in G$ ,

$$\phi_\mu(f)(h) = \int_G f(hg) d\mu^{s(h)}(g).$$

**Définition 7.13** 1. On dit qu'un élément  $f$  de  $L^\infty(G, \lambda \star \nu)$  est  $\phi_\mu$ -harmonique par l'opérateur  $\phi_\mu$ , si  $f$  est un point fixe de  $\phi_\mu$ , ce qui revient à dire que pour presque tout  $h \in G$

$$f(h) = \int_G f(hg) d\mu^{s(h)}(g).$$

2. L'ensemble  $\text{fix}(\phi_\mu)$  des fonctions  $\phi_\mu$ -harmoniques est appelé **frontière de Poisson commutative** de  $(G, \mu)$ .

**Définition 7.14** Soit  $(G, \lambda, \nu)$  un groupoïde mesuré muni d'un système borélien de Haar  $(\lambda^x)$ , on dit que les probabilités de transition  $(\mu^g)_{g \in G}$  d'un opérateur de Markov sont **absolument continues** si pour tout  $g \in G$ ,

$$\mu^g \prec \lambda^{t(g)}.$$

**Exemple 7.15 (Marche aléatoire sur un groupe)** Une marche aléatoire sur un groupe localement compact est définie par une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $G$ . On définit ainsi une chaîne de Markov sur  $G$  dont les probabilités de transition sont  $\mu^g := g\mu$ . L'opérateur de Markov associé est invariant par le groupe  $G$ . Notons  $\lambda$  la mesure de Haar à gauche sur  $G$ . L'absolue continuité des probabilités de transition de l'opérateur  $P$  est équivalente l'absolue continuité de la mesure  $\mu$  par rapport à  $\lambda$ .

**Exemple 7.16 (Marche aléatoire sur une relation d'équivalence)** Une relation d'équivalence  $R$  sur un espace  $X$  mesurable standard (dont la structure borélienne est sous-jacente à une topologie d'espace polonais) est dite **standard**, si  $R$  est un sous-ensemble mesurable de  $X \times X$ . On dit qu'elle est **dénombrable** si chaque classe d'équivalence  $[x] = R(x) := \{y \in X \mid (x, y) \in R\}$  est dénombrable. Une relation d'équivalence standard et dénombrable est dite **discrète**. Une relation d'équivalence standard  $R$  est dite **non-singulière** par rapport à une mesure de probabilité  $\lambda$  sur  $X$ , si pour tout borélien  $A$  de  $X$  tel que  $\lambda(A) = 0$ , le saturé de  $A$  dans  $X \times X$ , défini par

$$[A] := \bigcup_{x \in A} [x],$$

est aussi de mesure nulle. Considérons le groupoïde associé à la relation d'équivalence  $R$ . Les mesures de comptage sur les fibres  $G^x = x \times [x]$  définissent un système de Haar  $\lambda$  sur  $G$ . Soit  $\nu$  une mesure non singulière sur  $X$ ; la mesure  $\nu$  est alors quasi-invariante par rapport au système de Haar précédent. Le triplet  $(R, \lambda, \nu)$  constitue ainsi un groupoïde mesurable.

Définissons une marche aléatoire le long des classes d'équivalence de  $R$ . On se donne pour chaque classe d'équivalence  $[x]$  une mesure de probabilité  $(\mu^x)$  concentrée sur cette dernière qui est borélienne dans le sens où l'application  $R \ni (x, y) \rightarrow \mu^x(y)$  est borélienne. L'opérateur invariant de Markov associé sur le groupoïde  $G$  a pour probabilités de transition

$$p((x, y), (x, z)) = \mu^y(z),$$

où  $x, y, z \in X$  sont tels que  $(x, y), (x, z) \in R$ . Ces mesures de probabilité sont absolument continues par rapport au système de Haar.

### 7.1.3 Action d'un groupoïde sur un espace

**Définition 7.17** Soit  $G$  un groupoïde; un  $G$ -espace est un ensemble  $\Gamma$  muni d'une projection  $t = t_\Gamma : \Gamma \rightarrow G^{(0)}$  et d'une action :

$$\{(g, x) \in G \times \Gamma \mid s(g) = t(x)\} \ni (g, x) \longmapsto gx \in \Gamma,$$

vérifiant, lorsqu'elles sont définies les relations suivantes :

1.  $t(gx) = t(g)$ ,
2.  $\epsilon_{t(x)}x = x$
3.  $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$

**Définition 7.18** Soient  $G$  un groupoïde et  $\Gamma$  un  $G$ -espace, on définit le produit semi-direct de  $G$  par  $\Gamma$  noté  $G \ltimes \Gamma$  comme étant le groupoïde tel que :

$$\text{Mor}(G \ltimes \Gamma) = \{(x, g, y) \in \Gamma \times G \times \Gamma \mid x = gy\} \text{ et } \text{Obj}(G \ltimes \Gamma) = \Gamma.$$

Les applications sources et cibles sont définies par :

$$s((x, g, y)) = y \text{ et } t((x, g, y)) = x.$$

Le produit et l'inverse sont donnés par :

$$(x, g, y)(y, h, z) = (x, gh, z) \text{ et } (x, g, y)^{-1} = (y, g^{-1}, x).$$

## 7.2 Trajectoires et frontière de Poisson commutative

Nous rappelons des résultats connus sur la frontière de Poisson d'un groupoïde mesuré. On se réfère aux travaux de Kaimanovich [41, 38, 42, 39]. Nous reprenons les notations de 5.1.

### 7.2.1 Trajectoires

**Définition 7.19** Soit  $G$  un groupoïde, on dit que  $G$  est  $s$ -**discret** si pour tout  $g \in G$ ,  $G^{s(g)}$  est dénombrable.

Soit  $(G, \lambda, \nu)$  un groupoïde mesuré  $s$ -discret. Soit  $\mu = (\mu^x)_{x \in G^{(0)}}$  une famille borélienne de mesures de probabilité sur  $G^{(0)}$  indexée par les points  $x \in G^{(0)}$ .

On considère une mesure de probabilité  $\theta$  équivalente à  $\lambda \star \nu$ .

**Définition 7.20** L'ensemble  $G^\infty := G^\mathbb{N}$  des suites à valeurs dans  $G$  est appelé l'espace des trajectoires. Tout élément  $y = (y_0, y_1, \dots) \in G^\infty$  est appelé **trajectoire**.

**Définition 7.21** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , les **applications coordonnées**  $C_n$  de  $G^\infty$  dans  $G$  sont définies par :

$$C_n : G^\infty \ni y = (y_0, y_1, \dots) \mapsto y_n \in G.$$

La position d'une marche aléatoire à l'instant  $n$  sur  $G$  est donnée par le produit de variables aléatoires  $Y_0 Y_1 \cdots Y_n$  où  $Y_1, \dots, Y_n$  sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $G$  identiquement distribuées de loi  $\mu$ . La variable aléatoire  $Y_0$  indépendante de  $Y_1, \dots, Y_n$  représente la position initiale et a pour loi  $\theta$ . On définit la tribu

$$\mathcal{B}^\infty = \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{B} = \sigma(C_0, \dots, C_n, \dots),$$

où  $\mathcal{B}$  est la tribu sur  $G$ . La position de la marche est décrite par la mesure  $\mathbb{P}_\theta$  sur  $(G^\infty, \mathcal{B}^\infty)$  de mesure initiale  $\theta$  donnée par l'image de la mesure  $\theta \times (\mu)^\infty$  sur  $(G^\infty, \mathcal{B}^\infty)$  par l'application :

$$(y_0, y_1, y_2, \dots) \rightarrow (y_0, y_0 y_1, y_0 y_1 y_2, \dots).$$

Dans le cas où  $\theta = \delta_g$  avec  $g \in G$ , on posera  $\mathbb{P}_g := \mathbb{P}_{\delta_g}$ .

**Définition 7.22** Le *shift*  $T : G^\infty \rightarrow G^\infty$  est défini par :

$$T((y_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (y_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}, \quad \forall (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G^\infty.$$

Notons  $\mathcal{B}^{(i)}$  la tribu des ensembles  $T$ -invariants de  $(G^\infty, \mathbb{P}_\theta)$  :

$$\mathcal{B}^{(i)} = \{A \in \mathcal{B}^\infty \mid T^{-1}(A) = A\}.$$

L'ensemble des fonctions borélienne définies sur  $G^\infty$  invariantes par le shift  $T$  (et donc  $\mathcal{B}^{(i)}$ -mesurables) quotienté par la relation d'équivalence d'égalité  $\mathbb{P}_\theta$ -presque partout est noté  $L_{(i)}^\infty(G^\infty, \mathbb{P}_\theta)$ . C'est une algèbre de von Neumann commutative, il existe donc un espace mesuré  $(\Omega, \tilde{\mathbb{P}}_\theta)$  et un isomorphisme :

$$L_{(i)}^\infty(G^\infty, \mathbb{P}_\theta) \approx L^\infty(\Omega, \tilde{\mathbb{P}}_\theta).$$

L'ensemble des trajectoires  $G^\infty$  est un  $G$ -espace. En effet, pour tout  $g \in G$ ,

$$\mu^{s(g)}(G^{s(g)}) = 1,$$

pour  $\mathbb{P}_\theta$ -presque toutes les images par  $t$  des coordonnées d'une trajectoire sont égales. On peut définir pour  $\mathbb{P}_\theta$ -presque tout  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G^\infty$ ,

$$t : G^\infty \ni (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto t((y_n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

Pour tous  $g \in G$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G^\infty$  tels que  $s(g) = t((y_n)_{n \in \mathbb{N}})$ , l'action de  $G$  sur  $G^\infty$  est donnée par :

$$g(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (gy_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Cette action commute avec  $T$ , on peut ainsi définir une action de  $G$  sur  $\Omega$ . Ceci confère à  $\Omega$  une structure de  $G$ -espace et l'espace  $\Omega$  se fibre au dessus de  $G^{(0)}$  par la surjection  $t : \Omega \rightarrow G^{(0)}$ .

### 7.2.2 Identification de la frontière de Poisson

On définit une contraction  $R : L^\infty(G^\infty, \mathbb{P}_\theta) \rightarrow L^\infty(G, \lambda \star \nu)$  par :

$$(RF)(g) = \int_{G^\infty} F(y) d\mathbb{P}_g(y), \quad \forall F \in L^\infty(G^\infty), \quad \forall g \in G.$$

**Théorème 7.23** [43, 36, 56] *L'application  $R$  induit un isomorphisme isométrique de  $L^\infty(G^\infty, \mathbb{P}_\theta)$  dans  $\text{fix}(\phi_\mu)$ . Pour tout  $f \in \text{fix}(\phi_\mu)$ , la suite  $(f \circ C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge  $\mathbb{P}_\theta$ -presque partout vers  $R^{-1}f$ .*

**Remarque 7.24** *En utilisant cette identification, on dit que  $L_{(i)}^\infty(G^\infty, \mathbb{P}_\theta)$  ou que  $L^\infty(\Omega, \tilde{\mathbb{P}}_\theta)$  est la frontière de Poisson commutative de  $(G, \mu)$ .*

## 7.3 Frontière de Poisson non-commutative

Dans [35], Izumi a identifié la frontière de Poisson non-commutative de l'opérateur de convolution à droite défini par une mesure de probabilité sur un groupe discret  $G$ , comme étant le produit croisé  $L^\infty(\Omega, \nu) \rtimes_{\tilde{\alpha}} G$  où  $L^\infty(\Omega, \nu)$  est la frontière commutative. Comme dans le cas des frontières de Poisson non-commutatives de groupes, on peut définir la frontière de Poisson non-commutative d'un groupoïde. Le but de ce paragraphe est d'identifier cette dernière.

### 7.3.1 Opérateur de convolution non-commutatif

Soit  $(G, \lambda, \nu)$  un groupoïde  $s$ -discret et mesuré. On introduit la représentation à droite et à gauche sur le groupoïde  $G$ . Notons  $\mathcal{H} := L^2(G, \lambda \star \nu)$ .

**Définition 7.25** *La représentation régulière à droite sur le groupoïde  $G$  est  $\rho : G \rightarrow B(\mathcal{H})$  définie pour tout  $g, h \in G$  et pour tout  $f \in \mathcal{H}$  :*

$$\rho(g)(f)(h) = \begin{cases} \delta^{\frac{1}{2}}(g)f(hg) & \text{si } t(g) = t(h) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\delta := \frac{d(\lambda \star \nu)}{d(\lambda \star \nu)^{-1}}$ .



**Définition 7.26** La représentation régulière à gauche sur le groupoïde  $G$  est  $\Lambda : G \rightarrow B(\mathcal{H})$  définie pour tout  $g, h \in G$  et pour tout  $f \in \mathcal{H}$  :

$$\Lambda(g)(f)(h) = \begin{cases} f(g^{-1}h) & \text{si } t(g) = t(h) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On notera respectivement  $R(G)$  et  $L(G)$  les sous-algèbres de von Neumann engendrées par  $\{\rho(g) \mid g \in G\}$  et  $\{\Lambda(g) \mid g \in G\}$ .

**Proposition 7.27** [1] On a les relations suivantes :

$$R(G) = L(G)' \text{ et } L(G) = R(G)'.$$

Afin d'obtenir une généralisation de l'opérateur de convolution définie dans le cadre commutatif, nous introduisons l'opérateur suivant :

**Définition 7.28** Soit  $(\mu_x)_{x \in G^{(0)}}$  une famille de probabilités borélienne. On définit l'opérateur de convolution associé  $\Phi_\mu : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})$  par :

$$\Phi_\mu(X)f(h) = \int_G (\rho(g)X\rho(g^{-1}))f(h)d\mu^{s(h)}(g), \quad \forall X \in B(\mathcal{H}), \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad \forall h \in G$$

Notons  $x \mapsto \mathcal{H}^x := L^2(G^x, \lambda^x)$  le champ d'espaces de Hilbert mesurables correspondant à  $\mathcal{H}$ . On peut alors écrire :

$$\mathcal{H} = \int_{G^{(0)}}^{\oplus} H_x d\nu(x).$$

Notons  $\mathcal{D}$  l'algèbre de von Neumann des opérateurs décomposables de  $B(\mathcal{H})$ . Un opérateur  $T$  décomposable de  $B(\mathcal{H})$  s'écrit sous la forme :

$$T = \int_{G^{(0)}}^{\oplus} T_x d\nu(x),$$

où  $T_x \in B(L^2(G^x, \lambda^x))$ .

Réciproquement, si  $G^{(0)} \ni x \mapsto T_x \in B(L^2(G^x, \lambda^x))$  est un champ mesurable d'opérateurs tel que  $\sup_{x \in G^{(0)}} \|T_x\| \leq \infty$  alors  $T = \int_{G^{(0)}}^{\oplus} T_x d\nu(x)$  est dans  $B(\mathcal{H})$ .

**Proposition 7.29** L'algèbre de von Neumann  $\mathcal{D}$  est injective.

*Preuve:* Le commutant  $\mathcal{D}'$  de  $\mathcal{D}$  est l'algèbre de von Neumann des opérateurs diagonaux  $T$ , c'est-à-dire ceux qui s'écrivent sous la forme :

$$T = \int_{G^{(0)}}^{\oplus} k_x I_{H_x} d\nu(x),$$

où pour tout  $x \in G^{(0)}$ ,  $k_x \in \mathbb{C}$  et  $I_{H_x}$  est l'identité de  $B(\mathcal{H}_x)$ . Le groupe unitaire  $\mathcal{U}(\mathcal{D}')$  de  $\mathcal{D}'$  est un groupe moyennable car  $\mathcal{D}'$  est commutative. Soit  $m$  une moyenne invariante à gauche sur  $\mathcal{U}(\mathcal{D}')$ . Pour  $T \in B(\mathcal{H})$ , on définit  $S_T \in B(\mathcal{H})$  par :

$$\langle S_T \xi, \eta \rangle = m(U \mapsto \langle UTU^* \xi, \eta \rangle), \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}.$$

On a alors :

1. pour tout  $V \in \mathcal{U}(\mathcal{D}')$ ,

$$VS_TV^* = S_T$$

par invariance de  $m$ .

2. pour tout  $T \in B(\mathcal{H})$ ,  $\|S_T\| \leq \|T\|$ , car  $\|m\| \leq 1$ .  
 3. pour tout  $T \in \mathcal{D}$ ,  $S_T = T$  car :

$$UTU^* = T, \quad \forall U \in \mathcal{U}(\mathcal{D}'),$$

Comme  $\text{span}(\mathcal{U}(\mathcal{D}')) = \mathcal{D}'$ , on a donc

$$S_T \in \mathcal{D}'' = \mathcal{D}.$$

On a ainsi défini une application linéaire  $P : B(\mathcal{H}) \ni T \mapsto S_T \in \mathcal{D}$  avec  $\|P\| \leq 1$  telle que

$$P(T) = S_T = T.$$

L'algèbre de von Neumann  $\mathcal{D}$  est donc injective.  $\square$

**Remarque 7.30** Nous avons redémontré un cas particulier de la proposition 6.5 de [19].

Remarquons que  $\Phi_\mu(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$  par définition de  $\Phi_\mu$ .

**Proposition 7.31** L'application  $\Phi_\mu : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  est une application complètement positive normale.

*Preuve:* Soit  $T \in \mathcal{D}$  :

$$T = \int_{G^{(0)}}^{\oplus} T_x d\nu(x),$$

où  $T_x \in B(L^2(G^x, \lambda^x))$ . On a :

$$\Phi_\mu(T) = \int_{G^{(0)}}^{\oplus} \Phi_{\mu,x}(T_x) d\nu(x),$$

où  $\Phi_{\mu,x} : B(L^2(G^x, \lambda^x)) \mapsto B(L^2(G^x, \lambda^x))$ . Comme le groupoïde  $G$  est  $s$ -discret, la proposition 4.10 assure que pour tout  $x \in G^{(0)}$ ,  $\Phi_{\mu,x}$  est une application normale complètement positive. On en déduit donc que  $\Phi_\mu$  est complètement positive. D'après la proposition 8 du chapitre III-3 dans [24], l'application  $\Phi_\mu$  est normale.  $\square$

**Définition 7.32** On appelle *frontière de Poisson non-commutative* de l'opérateur  $\Phi_\mu$  l'ensemble  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$  des points fixes de  $\Phi_\mu$  dans  $\mathcal{D}$ .

Considérons l'extension de Poisson de  $G$ , c'est-à-dire le groupoïde défini par le produit semi-direct de  $G$  par  $\Omega$  noté  $G \ltimes \Omega$ . Le résultat principal de ce chapitre donne une description de  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$  :

**Théorème 7.33** L'ensemble  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$  est isomorphe à  $L(G \ltimes \Omega)$  comme algèbre de von Neumann, où  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$  est muni de la structure d'algèbre de von Neumann définie au 6.3.1.

Nous donnons la preuve de ce théorème au paragraphe 7.3.4.

### 7.3.2 Harmonicité dans $B(\mathcal{H})$

Soit  $(G, \lambda, \nu)$  un groupoïde  $s$ -discret et mesuré. Rappelons que le prédual de  $B(\mathcal{H})$  est  $B_1(\mathcal{H})$  l'ensemble des opérateurs à trace sur  $\mathcal{H}$ . On munit  $B(\mathcal{H})$  de la topologie ultrafaible  $\sigma(B(\mathcal{H}), B_1(\mathcal{H}))$  et de la tribu associée.

**Définition 7.34** Une application  $f : G \rightarrow B(\mathcal{H})$  mesurable est dite harmonique si pour tout  $h \in G$ ,

$$f(h) = \int_G f(hg) d\mu^{s(h)}(g).$$

Nous noterons  $\mathbb{H}_\mu(G, B(\mathcal{H}))$  l'ensemble des applications harmoniques bornées quotienté par la relation d'égalité  $\lambda \star \nu$  presque partout.

On introduit la représentation  $\pi$  sur  $G$  définie par :

$$\pi(h)(X) = \rho(h)X\rho(h^{-1}), \forall h \in G, \forall X \in B(\mathcal{H}).$$

Introduisons :

$$\mathbb{H}_\mu^{(i)}(G, B(\mathcal{H})) := \left\{ \varphi \in \mathbb{H}_\mu(G, B(\mathcal{H})) \mid \varphi(hh') = \pi(h')\varphi(h), \forall h, h' \in G^{(2)} \right\}.$$

**Proposition 7.35** 1. Soit  $X = \int_{G^{(0)}}^\oplus X_x d\nu(x) \in B(\mathcal{H})$  un opérateur décomposable dans  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$ , il existe alors un élément  $\varphi$  de  $\mathbb{H}_\mu^{(i)}(G, B(\mathcal{H}))$  tel pour tout  $x \in G^{(0)}$ ,

$$X_x = \varphi(\epsilon_x).$$

2. Soit  $\varphi \in \mathbb{H}_\mu^{(i)}(G, B(\mathcal{H}))$ , il existe alors un opérateur décomposable  $X = \int_{G^{(0)}}^\oplus X_x d\nu(x) \in B(\mathcal{H})$  dans  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$  tel que pour tout  $x \in G^{(0)}$ ,

$$X_x = \varphi(\epsilon_x).$$

On obtient ainsi une isométrie bijective  $\text{Fix}(\Phi_\mu) \rightarrow \mathbb{H}_\mu^{(i)}(G, B(\mathcal{H}))$ .

*Preuve:* Soit  $X$  un élément de  $\mathcal{D}$ . On remarque qu'un élément  $X \in \text{Fix}(\Phi_\mu)$  si et seulement si pour tout  $x \in G^{(0)}$ ,

$$X_x = \int_G \pi(g)(X_x) d\mu^x(g).$$

En composant pour tout  $h \in G^x$  par  $\pi(h)$ , on obtient pour tout  $x \in G^{(0)}$ ,

$$\pi(h)X = \int_G \pi(hg)(X) d\mu^x(g).$$

Définissons  $\varphi : G \rightarrow B(\mathcal{H})$  par :

$$\varphi(g) = \pi(g)X, \forall g \in G.$$

On remarque que pour tout  $h, h' \in G^{(2)}$ ,

$$\varphi(hh') = \pi(h')\varphi(h),$$

et que  $\varphi \in \mathbb{H}_\mu(G, B(\mathcal{H}))$ . Donc  $\varphi \in \mathbb{H}_\mu^{(i)}(G, B(\mathcal{H}))$ .

Réciproquement, considérons un élément  $\varphi \in \mathbb{H}_\mu(G, B(\mathcal{H}))$  tel que pour tout  $h, h' \in G^{(2)}$ ,

$$\varphi(hh') = \pi(h')\varphi(h).$$

Définissons pour tout  $x \in G^{(0)}$  l'opérateur  $X_x := \varphi(\epsilon_x) \in B(\mathcal{H}_x)$ . On remarque que  $\sup_{x \in G^{(0)}} \|X_x\| \leq \|\varphi\|_\infty < \infty$ . On peut donc définir l'opérateur décomposable  $X$  par :

$$X = \int_{G^{(0)}}^\oplus X_x d\nu(x).$$

L'harmonie de  $\varphi$  définie au paragraphe 7.34 donne pour tout  $x \in G^{(0)}$  :

$$\varphi(\epsilon_x) = \int_G \varphi(\epsilon_x g) d\mu^x(g) = \int_G \pi(g) \varphi(\epsilon_x) d\mu^x(g).$$

On a donc pour tout  $x \in G^{(0)}$  :

$$X_x = \int_G \pi(g) X_x d\mu^x(g).$$

On en déduit donc que  $X$  est dans  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$ . □

### 7.3.3 Identification de $\mathbb{H}_\mu(G, B(\mathcal{H}))$

Dans ce paragraphe, nous identifions les éléments de  $\mathbb{H}_\mu(G, B(\mathcal{H}))$ . Les techniques employées dans ce paragraphe sont inspirées du travail contenu dans [36].

En utilisant la construction au paragraphe 7.2, on obtient :

**Proposition 7.36** *L'espace quotient des applications bornées de  $G^\infty$  à valeurs dans  $B(\mathcal{H})$  et  $\mathcal{B}^{(i)}$ -mesurables quotienté par la relation d'égalité  $\mathbb{P}_\theta$  presque partout est isométriquement isomorphe à  $L^\infty(\Omega, B(\mathcal{H}), \tilde{\mathbb{P}}_\theta)$ .*

*Preuve:* L'espace quotient des applications bornées de  $G^\infty$  à valeurs dans  $B(\mathcal{H})$  et  $\mathcal{B}^{(i)}$ -mesurables quotienté par la relation d'égalité  $\mathbb{P}_\theta$ -presque partout est par construction  $L_{(i)}^\infty(G^\infty, \mathbb{P}_\theta) \otimes B(\mathcal{H})$ . Or  $L_{(i)}^\infty(G^\infty, \mathbb{P}_\theta) \approx L^\infty(\Omega, \tilde{\mathbb{P}}_\theta)$ . On en déduit donc que :

$$L_{(i)}^\infty(G^\infty, \mathbb{P}_\theta) \otimes B(\mathcal{H}) \approx L^\infty(\Omega, \tilde{\mathbb{P}}_\theta) \otimes B(\mathcal{H}) \approx L^\infty(\Omega, B(\mathcal{H}), \tilde{\mathbb{P}}_\theta).$$

□

On note  $L^\infty(G, B(\mathcal{H}))$  (respectivement  $L^\infty(G^\infty, B(\mathcal{H}))$ ) l'ensemble des applications mesurables bornées de  $G$  quotienté par la relation d'égalité  $\mathbb{P}_\theta$  presque partout dans  $B(\mathcal{H})$  (respectivement de  $G^\infty$  dans  $B(\mathcal{H})$  quotienté par la relation d'égalité  $\lambda \star \nu$ -presque partout).

On définit la contraction  $R : L^\infty(G^\infty, B(\mathcal{H})) \rightarrow L^\infty(G, B(\mathcal{H}))$  par :

$$(RF)(g) = \int_{G^\infty} F(y) d\mathbb{P}_g(y), \quad \forall F \in L^\infty(G^\infty, B(\mathcal{H})), \forall g \in G.$$

**Lemme 7.37** *Soit  $F : G^\infty \rightarrow B(\mathcal{H})$  une application  $\mathcal{B}^{(i)}$ -mesurable. En posant  $\varphi = RF$ , la suite  $(\varphi \circ C_n)$  converge  $*$ -faiblement  $\mathbb{P}_\theta$ -presque partout vers  $F$ . La suite  $(\|\varphi \circ C_n\|)$  converge  $\mathbb{P}_\theta$ -presque partout vers  $\|F\|$ .*

*Preuve:* Considérons un élément  $Y_1 \in B_1(\mathcal{H})$ . On définit alors les fonctions à valeurs complexes suivantes :

$$\varphi_{Y_1} : G \ni g \mapsto \text{tr}(Y_1 \varphi(g)) \in \mathbb{C},$$

$$F_{Y_1} : G^\infty \ni y \mapsto \text{tr}(Y_1 F(y)) \in \mathbb{C}.$$

Remarquons que  $\varphi_{Y_1}$  est une fonction harmonique et que  $RF_{Y_1} = \varphi_{Y_1}$ . D'après la proposition 7.23, on en déduit que  $F_{Y_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_1} \circ C_n$   $\mathbb{P}_\theta$ -presque partout. Donc la suite  $(\varphi \circ C_n)$  converge  $*$ -faiblement  $\mathbb{P}_\theta$ -presque partout vers  $F$ .

En posant pour tout  $g \in G$ ,  $H(g) = \|\varphi(g)\|$ , on remarque que  $H$  est sous-harmonique. Il existe donc un élément  $\tilde{F} : G^\infty \rightarrow [0, +\infty[$  de  $B(G^\infty, B(\mathcal{H}))$ ,  $\mathcal{B}^{(i)}$ -mesurable tel que :

$$\tilde{F} = \lim_{n \rightarrow \infty} H \circ C_n, \text{ } \mathbb{P}_\theta\text{-presque partout.}$$

Nous allons montrer que  $\tilde{F}(y) = \|F(y)\|$   $\mathbb{P}_\theta$ -presque partout. On remarque que l'on a :

$$\|F(y)\| \leq \tilde{F}(y),$$

Pour obtenir l'égalité  $\mathbb{P}_\theta$ -presque partout, il nous suffit de montrer que pour tout  $g \in G$  :

$$\int_{G^\infty} \tilde{F}(y) d\mathbb{P}_g(y) = \int_{G^\infty} \|F(y)\| d\mathbb{P}_g(y).$$

Considérons une suite  $(X_k)$  dense dans la boule unité fermée de  $B_1(\mathcal{H})$ . On définit alors la suite de fonctions  $(H_k)$  :

$$H_k : G \ni g \mapsto H_k(g) := \max_{0 \leq i \leq k} \text{tr}(X_i \varphi(g)) \in [0, +\infty[.$$

Remarquons que la suite  $(H_k)$  est une suite croissante constituée de fonctions sous-harmoniques sur  $(G, \mu)$ . La suite  $(H_k)$  converge donc simplement vers  $H$  et on a pour  $k \in \mathbb{N}$  fixé,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_k(C_n(y)) = \max_{0 \leq i \leq k} \text{tr}(X_i F(y)).$$

Posons alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$S_{k,n}(g) = \int_{G^\infty} H_k(C_n(y)) d\mathbb{P}_g(y) = \int_{G^\infty} H_k(gh) d\mu_n(h),$$

où  $\mu_n$  est la  $n$ -ième convolée de  $\mu$ . On définit alors  $S(g) := \sup_{k,n \in \mathbb{N}} S_{k,n}(g)$ . On va évaluer  $S(g)$  de deux manières. D'une part,

$$\begin{aligned} S(g) &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \left[ \sup_{n \in \mathbb{N}} S_{k,n}(g) \right] = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} S_{k,n}(g) \right] \\ &= \int_{G^\infty} \sup_{k \in \mathbb{N}} \max_{0 \leq i \leq k} \text{tr}(X_i F(y)) d\mathbb{P}_g(y) = \int_{G^\infty} \|F(y)\| d\mathbb{P}_g(y). \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} S(g) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left[ \sup_{k \in \mathbb{N}} S_{k,n}(g) \right] = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left[ \lim_{k \rightarrow \infty} S_{k,n}(g) \right] \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{G^\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} H_k(C_n(y)) d\mathbb{P}_g(y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{G^\infty} H(C_n(y)) d\mathbb{P}_g(y) = \int_{G^\infty} \tilde{F}(y) d\mathbb{P}_g(y). \end{aligned}$$

□

**Proposition 7.38** *L'application  $R$  est une isométrie surjective de  $L_{(i)}^\infty(G^\infty, \mathbb{P}_\theta) \otimes B(\mathcal{H})$  dans  $\mathbb{H}_\mu(G, B(\mathcal{H}))$ . Si  $\varphi$  est dans  $\mathbb{H}_\mu(G, B(\mathcal{H}))$  alors  $\varphi \circ C_n$  converge  $*$ -faiblement  $\mathbb{P}_\theta$ -presque partout vers  $R^{-1}\varphi$  et la suite  $\|\varphi \circ C_n\|$  converge  $\mathbb{P}_\theta$ -presque partout vers  $\|R^{-1}\varphi\|$ .*

*Preuve:* Soit  $F \in L_{(i)}^\infty(G^\infty, \mathbb{P}_\theta) \otimes B(\mathcal{H})$ . D'après le lemme précédent  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi \circ C_n\| = \|F\|$ . On en déduit donc que :

$$\|F\| \leq \|\varphi\|.$$

On remarque que  $R$  est une contraction. Posons  $\varphi = RF$ .

$$\|\varphi\| = \|RF\| = \left\| \int_{G^\infty} F(y) d\mathbb{P}_g(y) \right\| \leq \int_{G^\infty} \|F(y)\| d\mathbb{P}_g(y) \leq \|F\|.$$

Ainsi  $R$  est une isométrie de  $L^\infty(\Omega, B(\mathcal{H}), \tilde{\mathbb{P}})$  dans  $\mathbb{H}_\mu(G, B(\mathcal{H}))$ .

Montrons que  $R$  est surjective. Soit  $\varphi \in \mathbb{H}_\mu(G, B(\mathcal{H}))$ . Pour tout  $Y_1 \in B_1(\mathcal{H})$ , on définit la fonction  $\varphi_{Y_1} : G \ni g \mapsto \text{tr}(Y_1 \varphi(g)) \in \mathbb{C}$  qui est harmonique. D'après la proposition 7.23, l'ensemble :

$$\Omega_{Y_1} = \{y \in G^\infty \mid (\varphi_{Y_1}(C_n(y))) \text{ converge}\}$$

a un complémentaire  $\mathbb{P}_\theta$ -négligeable. Il existe donc un élément  $F_{Y_1} : G^\infty \rightarrow \mathbb{C}$  qui est  $\mathcal{B}^{(i)}$ -mesurable telle que pour tout  $y \in \Omega_{Y_1}$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_1}(C_n(y)) = F_{Y_1}(y) \text{ et } \varphi_{Y_1} = RF_{Y_1}.$$

Introduisons l'ensemble :

$$\hat{\Omega} = \bigcap_{Y_1 \in B_1(\mathcal{H})} \Omega_{Y_1}$$

qui a un complémentaire  $\mathbb{P}_\theta$ -négligeable en vertu de la séparabilité de  $B_1(\mathcal{H})$ . Pour tout  $y \in \hat{\Omega}$ , l'application  $B_1(\mathcal{H}) \ni Y_1 \mapsto F_{Y_1}(y)$  est une forme linéaire continue sur  $B_1(\mathcal{H})$ . Il existe donc  $F : G^\infty \rightarrow \mathbb{C}$  qui est  $\mathcal{B}^{(i)}$ -mesurable telle que pour tout  $y \in \hat{\Omega}$  :

$$\text{WOT}^* - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(C_n(y)) = F(y) \text{ et } \varphi = RF.$$

L'application  $R$  est donc surjective. □

**Remarque 7.39** 1. L'application  $R : L_{(i)}^\infty(G^\infty, \mathbb{P}_\theta) \otimes B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{H}_\mu(G, B(\mathcal{H}))$  est  $G$ -équivariante. On a pour tout  $(g, h) \in G^{(2)}$ ,

$$h \cdot RF(g) = R(h \cdot F)(g).$$

2. Grâce à la proposition 7.38, on munit  $\mathbb{H}_\mu(G, B(\mathcal{H}))$  d'une structure d'algèbre de von Neumann.

En utilisant la proposition 7.36, on en déduit donc :

**Corollaire 7.40** Les algèbres de von Neumann  $L^\infty(\Omega, B(\mathcal{H}), \tilde{\mathbb{P}}_\theta)$  et  $\mathbb{H}_\mu(G, B(\mathcal{H}))$  sont isomorphes.

### 7.3.4 Preuve du théorème 7.33

*Preuve:* Nous notons  $L_{(i)}^\infty(\Omega, B(\mathcal{H}), \tilde{\mathbb{P}}_\theta)$  l'ensemble des éléments  $(X_\omega)_{\omega \in \Omega} \in L^\infty(\Omega, B(\mathcal{H}), \tilde{\mathbb{P}}_\theta)$  tels que pour tout  $(g, \omega) \in G \times \Omega$  avec  $t(\omega) = s(g)$ ,

$$g \cdot X_\omega = \pi(g)X_\omega.$$

Montrons d'abord que les algèbres de von Neumann  $L_{(i)}^\infty(\Omega, B(\mathcal{H}), \tilde{\mathbb{P}}_\theta)$  et  $\mathbb{H}_\mu^{(i)}(G, B(\mathcal{H}))$  sont isométriquement isomorphes. D'après le corollaire 7.40, il existe un isomorphisme  $G$ -équivariant

$$\tilde{R} : L^\infty(\Omega, B(\mathcal{H}), \tilde{\mathbb{P}}_\theta) \rightarrow \mathbb{H}_\mu(G, B(\mathcal{H})).$$

Soit  $(X_\omega) \in L_{(i)}^\infty(\Omega, B(\mathcal{H}), \tilde{\mathbb{P}}_\theta)$ . On note  $\varphi \in \mathbb{H}_\mu(G, B(\mathcal{H}))$  l'image de  $(X_\omega)$  par  $\tilde{R}$ . En utilisant la  $G$ -équivariance de  $\tilde{R}$ , on a : pour tout  $(g, \omega) \in G \times \Omega$  avec  $t(\omega) = s(g)$  :

$$\begin{aligned} g \cdot X_\omega &= \pi(g)X_\omega, \\ \tilde{R}(g \cdot X_\omega) &= \tilde{R}(\pi(g)X_\omega), \\ g \cdot \tilde{R}(X_\omega) &= \pi(g)\tilde{R}(X_\omega), \\ g \cdot \varphi(\cdot) &= \pi(g)\varphi(\cdot) \end{aligned}$$

On a donc  $\varphi \in \mathbb{H}_\mu^{(i)}(G, B(\mathcal{H}))$ . La réciproque s'obtient en utilisant la  $G$ -équivariance de  $\tilde{R}^{-1}$ .

D'après la proposition 7.35, la frontière de Poisson  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$  est isométriquement isomorphe à  $L_{(i)}^\infty(\Omega, B(\mathcal{H}), \tilde{\mathbb{P}}_\theta)$ . D'après [1] par 6.2, l'algèbre de von Neumann  $L_{(i)}^\infty(\Omega, B(\mathcal{H}), \tilde{\mathbb{P}}_\theta)$  s'identifie à  $L(G \ltimes \Omega)$ . L'algèbre de von Neumann  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$  est donc isomorphe à  $L(G \ltimes \Omega)$ .  $\square$

## 7.4 Moyennabilité d'un groupoïde

Le théorème 7.33 permet de retrouver un résultat de Kaimanovich dans [39]. Ce dernier est énoncé ci-dessous au théorème 7.43. Rappelons la notion de moyennabilité pour un groupoïde.

**Définition 7.41** *Un groupoïde mesuré  $(G, \lambda, \nu)$  est dit moyennable s'il existe une application appelée **moyenne**  $\Pi : L^\infty(G, \lambda \star \nu) \rightarrow L^\infty(G^{(0)}, \nu)$  vérifiant les conditions suivantes :*

1.  $\Pi(f) \geq 0, \forall f \in L^\infty(G, \lambda \star \nu), f \geq 0$ .
2.  $\Pi(\mathbb{1}_G) = \mathbb{1}_{G^{(0)}}$ .
3.  $\Pi$  est  $G$ -invariante : pour tout système de mesures finies sur  $\tau = (\tau^x)_{x \in G^{(0)}}$  sur les fibres de la source et absolument continue par rapport au système de Haar, on a pour tout  $f \in L^\infty(G, \lambda \star \nu)$

$$\Pi(\tau * f) = \tau * \Pi(f),$$

où la convolution est définie par :

$$\tau * f(h) = \int_G f(hg) d\tau^{s(h)}(g).$$

Dans [1], la moyennabilité d'un groupoïde est caractérisée en terme de l'algèbre de von Neumann  $L(G)$ .

**Théorème 7.42** [1] *Un groupoïde  $s$ -discret mesuré  $(G, \lambda, \nu)$  est moyennable si et seulement si  $L(G)$  est injective<sup>1</sup>.*

Le théorème suivant dû à Kaimanovich montre que l'extension de Poisson d'un groupoïde est toujours moyennable. Notre théorème 7.33 va nous permettre d'en donner une nouvelle preuve dans le cas où  $G$  est  $s$ -discret.

---

1. Dans [1], le résultat est plus général et s'étend aux groupoïdes à isotropie discrète, c'est-à-dire tels que pour  $\nu$ -presque tout  $x \in G^{(0)}$ ,  $G_x^x$  est discret.

**Théorème 7.43** [39] *Soit  $(G, \lambda, \nu)$  un groupoïde discret mesuré muni d'un opérateur de Markov  $\phi_\mu$ . Soit  $(\Omega, \mathbb{P}_\theta)$  la frontière de Poisson commutative de  $\phi_\mu$ . Le groupoïde  $G \ltimes \Omega$  est moyennable.*

*Preuve:* D'après [6], il existe une projection  $E : \mathcal{D} \rightarrow \text{Fix}(\Phi_\mu)$ . Or d'après la proposition 7.29, l'algèbre de von Neumann  $\mathcal{D}$  est injective, il existe donc une projection  $P : B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{D}$ . En considérant la projection  $E \circ P : B(\mathcal{H}) \rightarrow \text{Fix}(\Phi_\mu)$ , on en déduit que  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$  est injective. Or d'après le théorème 7.33, il existe un isomorphisme d'algèbres de von Neumann entre  $L(G \ltimes \Omega)$  et  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$ . L'algèbre de von Neumann  $L(G \ltimes \Omega)$  est donc injective. D'après le théorème 7.42, le groupoïde  $G \ltimes \Omega$  est moyennable.  $\square$





## Chapitre 8

# Trajectoires quantiques

Ce chapitre est la reproduction de l'article "quantum trajectory on infinite-dimensional Hilbert spaces" [50] soumis pour publication.

### Abstract :

In this paper, we study quantum trajectories on infinite-dimensional Hilbert spaces associated with a quantum measurement. The quantum trajectory here is a Markov chain which takes values in the set of normal states of a Hilbert space and undergoes infinitely many transitions. Nielsen inequality is generalized in the case of infinite dimension. It enables to obtain properties of asymptotical mixed quantum measurements on a strongly compact algebras i.e. of measurements that do not purify asymptotically.

### 8.1 Introduction

Several physical experiments require repeated measurements on quantum systems. For example repeated measurements are used in the domain of photodetection for photon counting [63] or in the micro-maser experiment described in [76]. The state of a quantum system changes each time a measurement is performed. We are interested in the case where the same type of measurement is repeated many times on the system. By processing in this way, a sequence of states of the quantum system is obtained, this is precisely our quantum trajectory :

$$x_0 \xrightarrow{\text{first measurement}} x_1 \xrightarrow{\text{second measurement}} x_2 \dots \xrightarrow{\text{measurement n}} x_n$$

where  $(x_n)$  is a sequence of states. This quantum trajectory turns out to be a Markov chain on the space of the states of the studied quantum system i.e. on the space  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  of positive trace-class operators with normalized trace on a separable Hilbert space  $\mathcal{H}$ . Although for finite dimensional Hilbert spaces  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  is a set of matrices, the Markov chain on  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  is not a random walk on groups, but a random walk on a particular subset of a  $C^*$ -algebras. A natural question arises : what is the behavior of our quantum trajectory asymptotically ? More specifically, after repeating the same measurement, is the state of our quantum system trapped in the set of pure states i.e. states that cannot be non-trivially decomposed as convex combination of other states ? These questions have been answered in the case where the space of the states is the set of positive trace-class operators on a finite-dimensional Hilbert space and when the Markov chain undergoes finitely many transitions at every step [47, 53]. Unless the quantum measurement verifies some specific properties, the

quantum trajectory purifies almost surely, i.e. the state of the quantum system tends to be pure asymptotically. These results were employed for calculations and computer simulations of laboratory experiments, for example in biology to perform semantic distillation [71].

Yet real systems are ultimately described in an infinite-dimensional Hilbert space. In fact, even the simplest ones, like the quantum analog of the harmonic oscillator, are described by an infinite-dimensional Hilbert space. The purpose of this article is to show that the above mentioned results in finite dimension remain valid in infinite-dimensional Hilbert space in the case of strongly compact algebras, even if the quantum trajectory can choose among infinitely many transitions at every step. To prove this result, we generalize a Nielsen inequality in infinite dimension and investigate the topology of the set of normal states.

This paper is organized as follows. Section 8.2 studies the set of normal states. In section 8.3, we generalized a Nielsen inequality in infinite dimension. In section 8.4, our quantum trajectory will be defined as a Markov chain on the space of normal states. The section 8.5 is devoted to the main result the characterization of asymptotically mixed quantum measurements. In section 8.6, an ergodic theorem for quantum trajectory is studied. Finally, there is an appendix which gathers useful results.

Let  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$  be a separable Hilbert space of infinite dimension. We can additionally endow the set of operators on  $\mathcal{H}$  with :

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \operatorname{tr}(|x|) \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\operatorname{tr}(x^*x)} \\ \|x\|_\infty &= \sup \left\{ \frac{\|x(h)\|}{\|h\|} \mid h \in \mathcal{H}, \|h\| \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Let  $(B(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$  be the set of bounded operators on  $\mathcal{H}$ . We denote  $B_0(\mathcal{H})$  the set of compact operators, by  $B_{00}(\mathcal{H})$  the set of finite rank operators on  $\mathcal{H}$ . We also denote by  $B_1(\mathcal{H}) := \{x \in B(\mathcal{H}) \mid \|x\|_1 < +\infty\}$  the set of trace-class operators of  $B(\mathcal{H})$ , and  $B_2(\mathcal{H}) := \{x \in B(\mathcal{H}) \mid \|x\|_2 < +\infty\}$  the set of Hilbert-Schmidt operators on  $B(\mathcal{H})$ . Then  $(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$  and  $(B_2(\mathcal{H}), \|\cdot\|_2)$  are Banach spaces. The norm  $\|\cdot\|_2$  defines a scalar product on  $B_2(\mathcal{H})$ ,  $\forall a, b \in B_2(\mathcal{H})$ ,  $\langle a|b \rangle_2 = \operatorname{tr}(a^*b)$  rendering  $(B_2(\mathcal{H}), \|\cdot\|_2)$  a Hilbert space. Let recall the strong operator topology (SOT) on  $B(\mathcal{H})$  is defined by the semi-norms :  $s_\xi := \|a\xi\|$  where  $a \in B(\mathcal{H})$  and  $\xi \in \mathcal{H}$  and the weak operator topology (WOT) on  $B(\mathcal{H})$  is defined by the semi-norms  $s_{\xi_1, \xi_2} := |\langle a\xi_1, \xi_2 \rangle|$ , where  $a \in B(\mathcal{H})$  and  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}$ . Both these topologies are metrizable and will be useful. Moreover we have the inclusions :

$$B_{00}(\mathcal{H}) \subset B_1(\mathcal{H}) \subset B_2(\mathcal{H}) \subset B_0(\mathcal{H}) \subset B(\mathcal{H}).$$

If  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is a sequence of  $(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$  and  $x \in B_1(\mathcal{H})$  such that  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges to  $x$  in  $(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ , then the convergence is also true in  $(B_2(\mathcal{H}), \|\cdot\|_2)$  and in  $(B(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ . Let  $\mathcal{R}$  be a strongly compact algebra of  $B(\mathcal{H})$  i.e. a subalgebra of  $B(\mathcal{H})$  such that the closed unit ball  $\operatorname{ball}(\mathcal{R})$  of  $\mathcal{R}$  is relatively compact for the strong operator topology. We will study quantum trajectories on these algebras and use their topological properties. There are many examples of strongly compact algebras in [48].

**Example 8.1** *Let  $(e_n)$  be an orthonormal basis of  $\mathcal{H}$ . The set of operators on  $\mathcal{H}$  with lower triangular matrix in the basis  $(e_n)$  is a strongly compact operator.*

**Example 8.2** *The commutant of a compact operator with dense range is strongly compact.*

In [54], Marsalli has classified self-adjoint strongly compact algebras as direct sums of finite-dimensional, self-adjoint subalgebras of  $B(\mathcal{H})$ .

**Definition 8.3 (Quantum measurement)** A quantum measurement is defined as a sequence  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B(\mathcal{H})$  with  $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^* a_i = I$  in the strong operator topology (SOT), where  $I$  is the identity of  $B(\mathcal{H})$ .

When  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B(\mathcal{H})$  is a sequence of orthogonal projections, the measurement is called perfect measurement or von Neumann measurement. Let describe briefly how the quantum measurement acts. We study a quantum system at an initial normal state (we shall see in section 8.2 that a normal state can be represented by a self-adjoint positive trace-class operator  $x_0$  of  $B(\mathcal{H})$  with  $\|x_0\|_1 = 1$ ). Let denote  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  the set of normal states on  $B(\mathcal{H})$ . Performing a first measurement on our quantum system, the state of the system  $x_0$  becomes  $x_1 := \frac{a_{i_1} x_0 a_{i_1}^*}{\text{tr}(a_{i_1} x_0 a_{i_1}^*)}$  with probability  $\text{tr}(a_{i_1} x_0 a_{i_1}^*)$  for  $i_1 \in \mathbb{N}$ . Then we repeat many times the same measurement and we obtain a sequence of states  $(x_n)$ .

$$x_0 \xrightarrow[\text{tr}(a_{i_1} x_0 a_{i_1}^*)]{\text{with probability}} x_1 := \frac{a_{i_1} x_0 a_{i_1}^*}{\text{tr}(a_{i_1} x_0 a_{i_1}^*)} \xrightarrow[\text{tr}(a_{i_2} x_0 a_{i_2}^*)]{\text{with probability}} x_2 := \frac{a_{i_2} x_1 a_{i_2}^*}{\text{tr}(a_{i_2} x_1 a_{i_2}^*)} \cdots$$

**Definition 8.4 (Average measurements)** Consider a quantum measurement defined by the sequence  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B(\mathcal{H})$ , we define the corresponding average covariant measurement as the map  $\Phi$  given by :

$$\Phi : B(\mathcal{H}) \ni x \longmapsto \Phi(x) := \sum_{i=1}^{+\infty} a_i x a_i^* \in B(\mathcal{H}),$$

and the average contravariant measurement by the map  $\Psi$  given by :

$$\Psi : B(\mathcal{H}) \ni x \longmapsto \Psi(x) := \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^* x a_i \in B(\mathcal{H}).$$

The map  $\Phi$  is a normal completely positive map which is trace preserving whereas  $\Psi$  is a completely positive map which is unital. It is interesting to write  $\Phi$  differently, for all  $x \in B(\mathcal{H})$ ,

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(a_i x a_i^*) \frac{a_i x a_i^*}{\text{tr}(a_i x a_i^*)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i(x) \varphi_i(x),$$

where  $\pi_i(x) = \text{tr}(a_i x a_i^*)$  and  $\varphi_i(x) = \frac{a_i x a_i^*}{\text{tr}(a_i x a_i^*)}$ . Notice that  $\pi_i(x) \geq 0$  and  $\sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i(x) = 1$ . This form explains the terminology average measurement. We now state the main result of this paper which is proven in section 8.5 :

**Theorem 8.5** Let  $\mathcal{R}$  be a strongly compact algebra of  $B(\mathcal{H})$ , we define  $\mathcal{D} := \{x \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \cap B_{00}(\mathcal{H}) \mid \sqrt{x} \in \mathcal{R}\}$ . Consider a quantum measurement defined by  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B(\mathcal{H})$  with  $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^* a_i = I$  such that for all  $i \in \mathbb{N}$ ,  $a_i \in \mathcal{R}$ . If this quantum measurement does not purify asymptotically on  $\mathcal{D}$  then, there is a projection  $p \in B(\mathcal{H})$  with  $\dim(\text{rank}(p)) \geq 2$  such that :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \exists \lambda_i \geq 0, p a_i^* a_i p = \lambda_i p.$$

Consequently, if the associated measurement does not purify asymptotically then every  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  when restricted to a subspace of  $\mathcal{H}$  whose dimension is larger than 2, is proportional to an isometry.

## 8.2 Normal states on $B(\mathcal{H})$

### 8.2.1 Characterization of normal states on $B(\mathcal{H})$

As we work in infinite dimension, we will suppose that the states of quantum systems are normal states. Considering normal states is rather natural [30]. We recall the definition of a normal state :

**Definition 8.6 (Normal states on  $B(\mathcal{H})$ )** *A normal state  $\psi$  is a positive linear functional on  $B(\mathcal{H})$  verifying  $\psi(I) = 1$  where  $I$  is the identity of  $B(\mathcal{H})$ , and for any increasing sequence  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $B(\mathcal{H})$  that converges strongly to  $a$ , we have  $\psi(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \psi(a)$ .*

Normal states enable us to work with trace-class operator  $(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ . In fact normal positive linear functionals on  $B(\mathcal{H})$  are characterized by the following theorem :

**Theorem 8.7 (Characterization of normal positive linear functionals on  $B(\mathcal{H})$ )**

*If  $\psi$  is a positive linear functional on  $B(\mathcal{H})$ , then the following statements are equivalent :*

1.  $\psi$  is normal.
2. If  $\{E_i\}$  is a pairwise orthogonal family of projections in  $B(\mathcal{H})$  then

$$\psi\left(\sum_i E_i\right) = \sum_i \psi(E_i).$$

3.  $\psi$  is weak\*-continuous.
4. There is a unique positive trace-class operator  $\rho \in B(\mathcal{H})$  such that, for all  $a \in B(\mathcal{H})$ ,  $\psi(a) = \text{tr}(\rho a)$ .

A proof of this theorem can be found as theorem 46.4 in [21]. This theorem shows that, we can bijectively associate with a normal state on  $B(\mathcal{H})$  a positive trace-class operator with trace equal to 1. Condition 4 in theorem 8.7 of trace comes from the fact that a normal state maps  $I$  to 1. Consequently, we will use the term normal state to denote indistinctly the positive linear functional mapping  $I$  on 1 and the positive trace-class operator with trace equal to 1. We will now denote the set of normal states on  $B(\mathcal{H})$  by :

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) := \{\rho \in B(\mathcal{H}) \mid \rho = \rho^*, \rho \geq 0, \text{tr}(\rho) = 1\}.$$

Normal states on  $B(\mathcal{H})$  are the non-commutative analogs of absolutely continuous probability measures.  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  is a convex set of  $B(\mathcal{H})$ . Extremal points of  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  will be studied in 8.2.2.

### 8.2.2 Pure and mixed normal states on $B(\mathcal{H})$

Pure states are elements of  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  that cannot be decomposed in a non-trivial convex combination of other elements of  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  : pure states are extremal elements of  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ . Pure normal states on  $B(\mathcal{H})$  can be characterized in term of their moments.

**Proposition 8.8** *Let  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ , the following statements are equivalent :*

1.  $\rho$  is a pure.
2.  $\dim(\text{rank}(\rho)) = 1$ .
3.  $\text{tr}(\rho) = \text{tr}(\rho^2) = 1$ .

4.  $\forall m \in \mathbb{N}, \text{tr}(\rho^m) = 1.$

See [30] for a proof.

The normal quantum states that are not pure are called mixed. They can be characterized by their moment of order 2 :

**Proposition 8.9** *Let  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ,  $\rho$  is mixed if and only if  $\text{tr}(\rho^2) < 1$ .*

By definition, mixed normal states possess non-trivial convex decompositions into extremal states. Note however that the convex set  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  is not a Choquet simplex; consequently this decomposition is not unique and this is a distinctive property of non-commutative probabilities as opposed to commutative ones.

Given a sequence  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ , it is not always true that it has a limit in the uniform topology, but we can evaluate the moments of  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Definition 8.10 (Purification of a sequence of normal states)** *Let  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be a sequence of  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ ; we say that  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  purifies if and only if*

$$\forall m \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{tr}(\rho_n^m) = 1.$$

### 8.3 Extension of Nielsen inequalities

In this section we will generalize an inequality of Nielsen on infinite-dimensional Hilbert spaces. This inequality is used in the section 8.5 to prove the main theorem that characterizes mixed measurements. In the case of finite dimension, Nielsen gives more general inequalities. These inequalities are fundamental because they give us constraints between prior and posterior states after a quantum measurement is performed [58].

**Theorem 8.11 (Nielsen Inequality)** *Consider a quantum measurement defined by  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B(\mathcal{H})$  with  $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^* a_i = I$ . We have the following inequality, for all  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}), m \in \mathbb{N}$ , :*

$$\text{tr}(\rho^m) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} \text{tr}(a_i \rho a_i^*) \text{tr} \left( \left( \frac{a_i \rho a_i^*}{\text{tr}(a_i \rho a_i^*)} \right)^m \right).$$

Before proving Nielsen inequality, we will prove some lemmas and propositions that will be useful. At first we will need a version Horn's lemma in  $l^1(\mathbb{N})$ .

**Lemma 8.12** *Let  $(u_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$  be a family of complex numbers such that  $\forall i \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^{+\infty} |u_{i,j}|^2 = 1$  and  $\forall j \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{+\infty} |u_{i,j}|^2 = 1$ . Let  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be two sequences of non-negative numbers in  $l^1(\mathbb{N})$  such that for all  $i \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}, y_i = \sum_{j=1}^{+\infty} |u_{i,j}|^2 x_j$ . Then,*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^k y_i^\downarrow \leq \sum_{i=1}^k x_i^\downarrow,$$

where  $(x_n^\downarrow)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(y_n^\downarrow)_{n \in \mathbb{N}}$  are the reindexed sequences of  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  decreasingly ordered i.e.  $x_1^\downarrow \geq x_2^\downarrow \dots x_n^\downarrow \geq \dots \geq 0$  and  $y_1^\downarrow \geq y_2^\downarrow \dots y_n^\downarrow \geq \dots \geq 0$ .

*Proof:* The proof of this lemma is inspired from the proof of Horn lemma in the case of finite sequences [32]. Without lost of generality, we can suppose that  $x_1 \geq x_2 \dots x_n \geq \dots \geq 0$  and  $y_1 \geq y_2 \dots y_n \geq \dots \geq 0$ . If it is not the case, it suffices to reindex the sequences

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $(u_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ . For  $k, j \in \mathbb{N}$ , define  $w_j^{(k)} := \sum_{i=1}^k |u_{i,j}|^2$ , and we remark that :

$$\begin{aligned} \forall k, j \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq w_j^{(k)} \leq 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=1}^{+\infty} w_j^{(k)} = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^k |u_{i,j}|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{+\infty} |u_{i,j}|^2 = \sum_{i=1}^k 1 = k. \end{aligned}$$

Let evaluate for all  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (y_i - x_i) &= \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^{+\infty} |u_{i,j}|^2 x_j - x_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} w_j^{(k)} x_j - \sum_{i=1}^k x_i + x_k \left( k - \sum_{j=1}^{+\infty} w_j^{(k)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^k w_j^{(k)} x_j + \sum_{j=k+1}^{+\infty} w_j^{(k)} x_j - \sum_{i=1}^k x_i + x_k \left( k - \sum_{j=1}^k w_j^{(k)} \right) - x_k \sum_{j=k+1}^{+\infty} w_j^{(k)} \\ &= \sum_{j=1}^k \underbrace{(1 - w_j^{(k)})}_{\geq 0} \overbrace{(x_k - x_j)}^{\leq 0} + \sum_{j=k+1}^{+\infty} w_j^{(k)} \underbrace{(x_j - x_k)}_{\leq 0} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

We conclude that for all  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{i=1}^k y_i \leq \sum_{i=1}^k x_i$ .  $\square$

Since  $\rho$  is a state,  $\rho$  is a hermitian positive operator with  $\text{tr}(\rho) = 1$ . The eigenvalues of  $\rho$  are non-negative. We prove this result for normal states in infinite dimension as well as the Ky Fan's maximum principle. The proof follows closely the one in finite dimension [58].

**Proposition 8.13** *Let  $\rho$  be a hermitian positive operator. Let  $(\lambda_k(\rho))_{k \in \mathbb{N}}$  be its eigenvalues counted with multiplicity such that  $\lambda_1(\rho) \geq \lambda_2(\rho) \geq \dots \geq \lambda_k(\rho) \geq \dots \geq 0$  then for all  $k \geq 1$ ,*

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j(\rho) = \max_{p \text{ projector of dimension } k} \text{tr}(\rho p).$$

*Preuve:* We will note for  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_j$  instead of  $\lambda_j(\rho)$  when there is no confusion. Define  $p$  as the orthogonal projection on the space spanned by the  $k$  first eigenvectors associated with the first  $k$  eigenvalues. Then we have :

$$\text{tr}(\rho p) = \sum_{j=1}^k \lambda_j.$$

We will now show that for any projector  $p$  of rank equal to  $k$ ,

$$\text{tr}(\rho p) \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j$$

Let  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be an Hilbertian basis of  $\mathcal{H}$  such that  $p = \sum_{j=1}^k |e_j\rangle\langle e_j|$ . Let  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be an orthonormal basis of eigenvectors associated with eigenvalues  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$  of  $\rho$ . In this case :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \langle e_j, \rho(e_j) \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} |u_{j,k}|^2 \lambda_k$$

where the sequence  $(u_{j,k})_{j,k \in \mathbb{N}}$  is defined by :  $\forall j, k \in \mathbb{N}$ ,  $(u_{j,k}) := (\langle e_j, f_k \rangle)$  and verify,  $\forall j \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_{j,k}|^2 = 1$  and  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{j=1}^{+\infty} |u_{j,k}|^2 = 1$ . Horn's lemma 8.12 can now be applied for all  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathrm{tr}(\rho p) = \sum_{j=1}^k \langle e_j, \rho(e_j) \rangle \leq \sum_{j=1}^k \lambda_j.$$

□

**Proposition 8.14** *Consider a quantum measurement defined by  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B(\mathcal{H})$  with  $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^* a_i = I$ , let  $\rho$  be a state of  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ , then for :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^k \lambda_j(\rho) \leq \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_j(a_i \rho a_i^*) \right).$$

*Proof:* For all  $k \in \mathbb{N}$ , for  $p$  a well-chosen projection of rank  $k$ , we have by applying lemma 8.13 :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \lambda_j(\rho) &= \sum_{j=1}^k \lambda_j(\sqrt{\rho} \sqrt{\rho}) = \sum_{j=1}^k \lambda_j(\sqrt{\rho} I \sqrt{\rho}) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \left( \sqrt{\rho} \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^* a_i \sqrt{\rho} \right) \\ &= \sum_{j=1}^k \lambda_j \left( \sum_{i=1}^{+\infty} \sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho} \right) = \mathrm{tr} \left( \left( \sum_{i=1}^{+\infty} \sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho} \right) p \right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{tr}(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho} p) \\ &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^k \lambda_j(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho}) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^k \lambda_j(a_i \rho a_i^*) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_j(a_i \rho a_i^*). \end{aligned}$$

The last inequality comes from the fact that the eigenvalues of  $\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho}$  and the eigenvalues of  $a_i \rho a_i^*$  are the same with the same multiplicities. □

*Proof of theorem 8.11 :* According to lemma 8.14, for all  $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j(\rho) \leq \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_j(a_i \rho a_i^*) \right) = \sum_{j=1}^k \left( \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{tr}(a_i \rho a_i^*) \lambda_j \left( \frac{a_i \rho a_i^*}{\mathrm{tr}(a_i \rho a_i^*)} \right) \right)$$

For clarity, denote  $x_j := \lambda_j(\rho)$  and  $y_j := \sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{tr}(a_i \rho a_i^*) \lambda_j \left( \frac{a_i \rho a_i^*}{\mathrm{tr}(a_i \rho a_i^*)} \right)$ . Hence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=1}^k x_j \leq \sum_{j=1}^k y_j.$$

According to the theory of weak majorization [33], there exists  $S = (s_{j,p}) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$  with :

$$\forall 1 \leq j \leq k, \sum_{p=1}^k |s_{j,p}|^2 = 1 \quad (8.1)$$

$$\forall 1 \leq p \leq k, \sum_{j=1}^k |s_{j,p}|^2 = 1 \quad (8.2)$$

such that for all  $1 \leq j \leq k$ ,

$$x_j \leq \sum_{p=1}^k |s_{j,p}|^2 y_p. \quad (8.3)$$



Let  $m \in \mathbb{N}$  and consider the convex and increasing function  $g$  defined by :

$$g : [0, +\infty[ \ni x \longmapsto g(x) := x^m \in [0, +\infty[.$$

By applying  $g$  on (8.3), we obtain for all  $1 \leq j \leq k$ ,

$$g(x_j) \leq g\left(\sum_{p=1}^k |s_{j,p}|^2 y_p\right) \leq \sum_{p=1}^k |s_{j,p}|^2 g(y_p).$$

We can now sum the last inequality on  $j \in \{1 \dots k\}$ ,

$$\sum_{j=1}^k g(x_j) \leq \sum_{j=1}^k \sum_{p=1}^k |s_{j,p}|^2 g(y_p) = \sum_{p=1}^k \sum_{j=1}^k |s_{j,p}|^2 g(y_p) = \sum_{p=1}^k g(y_p).$$

The last equality comes from (8.2). By returning to the definition of  $x_j$  and  $y_j$ , thus

$$\sum_{p=1}^k g(\lambda_p(\rho)) \leq \sum_{p=1}^k g\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(a_i \rho a_i^*) \lambda_p\left(\frac{a_i \rho a_i^*}{\text{tr}(a_i \rho a_i^*)}\right)\right).$$

By using the convexity of  $g$  and the fact that  $\sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(a_i \rho a_i^*) = 1$ , we obtain for all  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^k g(\lambda_p(\rho)) &\leq \sum_{p=1}^k \sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(a_i \rho a_i^*) g\left(\lambda_p\left(\frac{a_i \rho a_i^*}{\text{tr}(a_i \rho a_i^*)}\right)\right) \\ \sum_{p=1}^k (\lambda_p(\rho))^m &\leq \sum_{p=1}^k \sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(a_i \rho a_i^*) \left(\lambda_p\left(\frac{a_i \rho a_i^*}{\text{tr}(a_i \rho a_i^*)}\right)\right)^m. \end{aligned}$$

Letting  $k \longrightarrow +\infty$ , it follows that for all  $m \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{+\infty} (\lambda_p(\rho))^m &\leq \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(a_i \rho a_i^*) \left(\lambda_p\left(\frac{a_i \rho a_i^*}{\text{tr}(a_i \rho a_i^*)}\right)\right)^m \\ \text{tr}(\rho^m) &\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(a_i \rho a_i^*) \text{tr}\left(\left(\frac{a_i \rho a_i^*}{\text{tr}(a_i \rho a_i^*)}\right)^m\right). \end{aligned}$$

□

## 8.4 Quantum trajectory associated with a measurement

### 8.4.1 Definition of the quantum trajectory

Using for  $x \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  and  $i \in \mathbb{N}$  the notation  $\pi_i(x)$  and  $\varphi_i(x)$  introduced in the Introduction :

$$\begin{aligned} \pi_i(x) &= \text{tr}(a_i x a_i^*) \\ \varphi_i(x) &= \frac{a_i x a_i^*}{\text{tr}(a_i x a_i^*)}. \end{aligned}$$

We observe that the repeated measurement scheme described there generates a sequence  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ . The sequence  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  can be viewed as a realization of a random variable

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  taking values in  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ . We will now define our quantum trajectory in terms of a classical Markov chain on the space of normal states  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  endowed with its Borel  $\sigma$ -field  $\mathcal{X}$ . Let  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  be a probability space. Then for any  $A \in \mathcal{X}$ , for all  $x \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ,

$$P(x, A) = \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i(x) \delta_{\varphi_i(x)}(A),$$

defines a Markov transition kernel on  $(\mathcal{S}(\mathcal{H}), \mathcal{X})$ .

**Definition 8.15** *The quantum trajectory, associated with a measurement on a quantum system at initial state  $x_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  is the Markov chain  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  defined by the Markov operator  $P$  with initial probability  $\delta_{x_0}$ .*

Notice that  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is a sequence of random variables defined on  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  taking values in  $(\mathcal{S}(\mathcal{H}), \mathcal{X})$  such that :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in A | X_n = x) = P(x, A).$$

We will denote  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  the natural filtration of  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and we also denote as usual  $\mathbb{P}_x$  the probability measure for the chain starting at  $x$ .

We define an augmented Markov chain  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on the augmented probability space  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathbb{P}})$  taking values in  $(\mathcal{S}(\mathcal{H}) \times \mathbb{N}, \mathcal{X} \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ . We define the Markov kernel  $Q$ ,  $\forall x \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\forall A \in \mathcal{X}$ ,  $\forall J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , :

$$Q((x, k); A \times J) := \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i(x) \delta_{\varphi_i(x)}(A) \delta_i(J).$$

**Definition 8.16** *Define  $(Z_n) := (X_n, I_n)$  the Markov chain with Markov kernel  $Q$ , where  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is the previously Markov chain and  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a integer indicating the chosen transition. Then  $\forall x \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\forall A \in \mathcal{X}$ ,  $\forall J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,*

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} \in A \times J | Z_n = (x, k)) = Q((x, k); A \times J) = \sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i(x) \delta_{\varphi_i(x)}(A) \delta_i(J).$$

When  $Z_n = z_n = (x_n, i_n)$  then :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in A | Z_n = (x_n, i_n)) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in A | X_n = x_n) = P(x_n, A),$$

while

$$\mathbb{P}(I_{n+1} \in J | Z_n = (x_n, i_n)) = \sum_{i \in J} \pi_i(x_n).$$

Therefore, the first component of  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is the original Markov chain while the second component is merely a hidden Markov chain.

### 8.4.2 Properties of the quantum trajectory

The quantum trajectory  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  does not necessarily converge in the operator norm. Nevertheless, we can evaluate its moments by considering the sequence :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad S_n^{(m)} := \text{tr}(X_n^m).$$

The idea is to observe the asymptotic behavior of  $(S_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$  when  $n$  is large. If for all  $m \in \mathbb{N}$ , the moments of our quantum trajectory tend to 1, then we will say that it purifies.

**Definition 8.17 (Purification of a quantum trajectory)** Let  $\mathcal{E}$  be a subset of  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ . A quantum measurement is asymptotically pure on  $\mathcal{E}$ , if and only if for any initial state  $x_0 \in \mathcal{E}$ , every quantum trajectory  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  starting at  $x_0$  verifies :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \mathbb{P}_{x_0} \left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{(m)} = 1 \right] = \mathbb{P}_{x_0} \left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{tr}(X_n^m) = 1 \right] = 1$$

A quantum measurement that is not asymptotically pure on  $\mathcal{E}$  is called asymptotically mixed on  $\mathcal{E}$ .

**Theorem 8.18** Let  $(X_n)$  be a quantum trajectory of initial state  $x_0$  associated with the a quantum measurement defined by the sequence  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B(\mathcal{H})$ . For every  $m \in \mathbb{N}$ , the sequence of moments  $(S_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}} := (\text{tr}(X_n^m))_{n \in \mathbb{N}}$  converges  $\mathbb{P}_{x_0}$ -almost surely and in  $L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_{x_0})$  to a random variable  $S^{(m)}$ .

*Proof:* Nielsen inequality on infinite-dimensional Hilbert space establishes that : for all  $x \in \mathcal{S}$ , for all  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{tr}(x^m) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(a_i x a_i^*) \text{tr} \left( \left( \frac{a_i x a_i^*}{\text{tr}(a_i x a_i^*)} \right)^m \right).$$

Applied to the quantum trajectory  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , this inequality implies that :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, S_n^{(m)} = \text{tr}(X_n^m) \leq \mathbb{E}(\text{tr}(X_{n+1}^m) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_{n+1}^{(m)} | \mathcal{F}_n),$$

hence for all  $m \in \mathbb{N}$ , the sequence  $(S_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$  is a submartingale. Since  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is a sequence of states, necessarily  $(S_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}} := (\text{tr}(X_n^m))_{n \in \mathbb{N}}$  takes values in  $[0, 1]$ . Thus the submartingale is uniformly bounded. Therefore [57], there exists a random variable  $S^{(m)}$  in  $L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_{x_0})$  such that :

$$S_n^{(m)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S^{(m)}, \quad \mathbb{P}_{x_0} \text{ a.s. and in } L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_{x_0}).$$

□

## 8.5 Mixed quantum measurements

In this section, we will characterize mixed quantum measurement. The purpose of this section is to prove theorem 8.5. In its proof we will need properties of the function  $\Delta_m$  defined on  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  by :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \Delta_m : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \ni x \longmapsto \Delta_m(x) := \sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(a_i x a_i^*) \left( \text{tr} \left( \frac{a_i x a_i^*}{\text{tr}(a_i x a_i^*)} \right)^m - \text{tr}(x^m) \right)^2 \in [0, +\infty]. \quad (8.4)$$

$\Delta_m(x)$  can be expressed in terms of conditional expectation and of the quantum trajectory  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  with initial state  $x_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  by :

$$\Delta_m(X_n) = \mathbb{E} \left( \left( S_{n+1}^{(m)} - S_n^{(m)} \right)^2 | \mathcal{F}_n \right).$$

### 8.5.1 Properties of $\Delta_m$

**Lemma 8.19** *For any quantum trajectory  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  starting at state  $x_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  and for all  $m \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{x_0}(\Delta_m(X_n)) = 0.$$

*Proof:* It has been proven in section 8.4 that  $(S_n^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$  is a uniformly integrable submartingale which takes values in  $[0, 1]$  converging in  $L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_{x_0})$  to  $S^{(m)}$ . Since :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{x_0}(|S_n^{(m)} - S^{(m)}|) = 0,$$

and for all  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|S_{n+1}^{(m)} - S_n^{(m)}| \leq 1$ , it follows that :

$$\mathbb{E}_{x_0}(\Delta_m(X_n)) = \mathbb{E}_{x_0}((S_{n+1}^{(m)} - S_n^{(m)})^2) \leq \mathbb{E}_{x_0}(|S_n^{(m)} - S^{(m)}|),$$

hence  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{x_0}(\Delta_m(X_n)) = 0$ . □

**Lemma 8.20** *For every  $m \geq 2$ , the following inclusion holds,*

$$\left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{tr}(X_n^m)) < 1 \right] \subset \left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{tr}(X_n^2)) < 1 \right].$$

*Proof:* For every  $\omega \in \Omega$ ,  $X_n(\omega)$  is a positive trace-class operator. Let  $(\lambda_{n,k}(\omega))_{k \in \mathbb{N}}$  be its eigenvalues. For any  $p \in \mathbb{N}$ , the eigenvalues of  $X_n^p(\omega)$  are  $(\lambda_{n,k}(\omega)^p)_{k \in \mathbb{N}}$ . According to Hölder's inequality,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{k,n}^2 \leq \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{k,n}^m \right)^{\frac{1}{m}} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{k,n}^{m'} \right)^{\frac{1}{m'}},$$

where  $m$  and  $m'$  are conjugate :  $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1$ . We remark that  $\left( \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{k,n}^{m'} \right)^{\frac{1}{m'}} \leq 1$  thus

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{k,n}^2 &\leq \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{k,n}^m \right)^{\frac{1}{m}} \times 1 \\ \text{tr}(X_n^2) &\leq (\text{tr}(X_n^m))^{\frac{1}{m}} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{tr}(X_n^2) &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{tr}(X_n^m))^{\frac{1}{m}}. \end{aligned}$$

We conclude that if  $\omega \in [\lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{tr}(X_n^m)) < 1]$  then  $\omega \in [\lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{tr}(X_n^2)) < 1]$  i.e.  $[S^{(m)} < 1] \subset [S^{(2)} < 1]$ . □

We will now denote by  $\mu_2 := \mathbb{E}_{x_0} [\lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{tr}(X_n^2))] = \mathbb{E}_{x_0}(S^{(2)})$ .

**Proposition 8.21** *If the quantum measurement is asymptotically mixed on  $\mathcal{E}$  then there exists a sequence  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of states in  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  such that :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_m(\rho_n) = 0 \quad \text{and} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{tr}(\rho_n^2) \leq \frac{1 + \mu_2}{2}.$$

with  $\rho_n := \frac{a_{j_n} \dots a_{j_1} x_0 a_{j_1}^* \dots a_{j_n}^*}{\text{tr}(a_{j_n} \dots a_{j_1} x_0 a_{j_1}^* \dots a_{j_n}^*)}$  where  $1 \leq j_1, \dots, j_n \leq n$  and  $x_0 \in \mathcal{E}$

*Proof:* For an asymptotically mixed quantum measurement on  $\mathcal{E}$ , there exists a state  $x_0$  in  $\mathcal{E}$  and an integer  $m \geq 2$  such that :

$$\mathbb{P}_{x_0}[S^{(m)} \neq 1] > 0. \quad (8.5)$$

As  $S^{(m)}$  takes values in  $[0, 1]$ , we have the equality  $[S^{(m)} \neq 1] = [S^{(m)} < 1]$ . According to the proposition 8.20 and the inequality (8.5),

$$\mathbb{P}_{x_0}[S^{(2)} < 1] \geq \mathbb{P}_{x_0}[S^{(m)} < 1] > 0.$$

Moreover  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\text{tr}(X_n^2)) := S^{(2)} \leq 1$ , thus

$$\mu_2 := \mathbb{E}_{x_0}(S^{(2)}) < 1.$$

The sequence of random variables  $S_n^{(2)} := \text{tr}(X_n^2)$  is a priori defined on  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ . Yet we can see  $S_n^{(2)}$  as a sequence of random variables on  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathbb{P}})$  verifying  $\tilde{\mathbb{E}}(S_n^{(2)}) = \mathbb{E}(S_n^{(2)})$ . Consider the event,  $\tilde{A}_n := \left\{ \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid S_n^{(2)}(\tilde{\omega}) \leq \frac{1+\mu_2}{2} \right\}$ . Since  $(S_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$  is a submartingale converging to  $S^{(2)}$ , we have :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \tilde{\mathbb{E}}_{x_0}(S_n^{(2)}) = \mathbb{E}_{x_0}(S_n^{(2)}) \leq \mathbb{E}_{x_0}(S^{(2)}) =: \mu_2 < 1$$

Thus for all  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mu_2 \geq \tilde{\mathbb{E}}_{x_0} \left[ S_n^{(2)} \mathbb{1}_{\left[ S_n^{(2)} > \frac{1+\mu_2}{2} \right]} \right] \geq \left( \frac{1+\mu_2}{2} \right) \tilde{\mathbb{P}}_{x_0} \left[ S_n^{(2)} > \frac{1+\mu_2}{2} \right] = \left( \frac{1+\mu_2}{2} \right) (1 - \tilde{\mathbb{P}}_{x_0}(\tilde{A}_n)),$$

consequently :

$$\tilde{\mathbb{P}}_{x_0}(\tilde{A}_n) \geq \frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}.$$

Consider now for  $k \in \mathbb{N}$  the event :

$$\tilde{A}_n^k := \left\{ \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega} \mid S_n^{(2)}(\tilde{\omega}) \leq \frac{1+\mu_2}{2} \text{ and } I_1(\tilde{\omega}) \leq k, \dots, I_n(\tilde{\omega}) \leq k \right\}.$$

We have the relations :

$$\tilde{A}_n^k \subset \tilde{A}_n^{k+1} \text{ and } \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \tilde{A}_n^k = \tilde{A}_n.$$

Thus  $(\tilde{\mathbb{P}}_{x_0}(\tilde{A}_n^k))_{k \in \mathbb{N}}$  is an increasing sequence and :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbb{P}}_{x_0}(\tilde{A}_n^k) = \tilde{\mathbb{P}}_{x_0}(\tilde{A}_n)$$

Hence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k_n \in \mathbb{N}, (k \geq k_n) \Rightarrow \tilde{\mathbb{P}}_{x_0}(\tilde{A}_n^k) \geq \frac{1}{2} \tilde{\mathbb{P}}_{x_0}(\tilde{A}_n) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1-\mu_2}{1+\mu_2} \right). \quad (8.6)$$

For all  $m \in \mathbb{N}$ , the sequence  $(\Delta_m(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$  is a random variable on  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_{x_0})$ , but can also be considered as a random variable on  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{T}}, \tilde{\mathbb{P}}_{x_0})$  verifying :

$$\tilde{\mathbb{E}}_{x_0}(\Delta_m(X_n)) = \mathbb{E}_{x_0}(\Delta_m(X_n)). \quad (8.7)$$

We have the inequality,  $\forall m, n \in \mathbb{N}$

$$J_{n,k} := \int_{\tilde{A}_n^k} (\Delta_m(X_n(\tilde{\omega})) \tilde{\mathbb{P}}_{x_0}(d\tilde{\omega})) \leq \tilde{\mathbb{E}}_{x_0}(\Delta_m(X_n(\tilde{\omega}))). \quad (8.8)$$

The left side of this inequality which is denoted  $J_{n,k}$  can be rewritten in this way :

$$\begin{aligned}
J_{n,k} &= \int_{\tilde{A}_n} (\Delta_m(X_n(\tilde{\omega})) \mathbb{1}_{[I_1 \leq k, \dots, I_n \leq k]}(\tilde{\omega})) \tilde{\mathbb{P}}_{x_0}(d\tilde{\omega}) \\
&= \sum_{i_1=1}^k \dots \sum_{i_n=1}^k \int_{\tilde{A}_n} (\Delta_m(X_n(\tilde{\omega})) \mathbb{1}_{[I_1=i_1, \dots, I_n=i_n]}(\tilde{\omega})) \tilde{\mathbb{P}}_{x_0}(d\tilde{\omega}) \\
&= \sum_{i_1=1}^k \dots \sum_{i_n=1}^k \Delta_m \left( \frac{a_{i_n} \dots a_{i_1} x_0 a_{i_1}^* \dots a_{i_n}^*}{\text{tr}(a_{i_n} \dots a_{i_1} x_0 a_{i_1}^* \dots a_{i_n}^*)} \right) \tilde{\mathbb{P}}_{x_0}(\tilde{A}_n \cap [I_1 = i_1, \dots, I_n = i_n]).
\end{aligned}$$

In this formula,  $J_{n,k}$  is written as a finite sum, thus we can find an element (in principle not unique)  $\rho_n := \frac{a_{j_n} \dots a_{j_1} x_0 a_{j_1}^* \dots a_{j_n}^*}{\text{tr}(a_{j_n} \dots a_{j_1} x_0 a_{j_1}^* \dots a_{j_n}^*)}$  where  $1 \leq j_1 \leq k, \dots, 1 \leq j_n \leq k$  such that  $\Delta_m(\rho_n)$  is minimal among the set :

$$\left\{ \Delta_m \left( \frac{a_{i_n} \dots a_{i_1} x_0 a_{i_1}^* \dots a_{i_n}^*}{\text{tr}(a_{i_n} \dots a_{i_1} x_0 a_{i_1}^* \dots a_{i_n}^*)} \right) \mid 1 \leq i_1, \dots, i_n \leq k \right\}.$$

Remark that  $\rho_n$  is a state of  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  such that  $\forall n \in \mathbb{N}, \text{tr}(\rho_n^2) \leq \frac{1+\mu_2}{2}$  because  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is in  $A_n$ . Hence, we have the inequality :

$$\begin{aligned}
J_{n,k} &\geq \sum_{i_1=1}^k \dots \sum_{i_n=1}^k \Delta_m(\rho_n) \tilde{\mathbb{P}}_{x_0}(A_n \cap [I_1 = i_1, \dots, I_n = i_n]) \\
&\geq \Delta_m(\rho_n) \tilde{\mathbb{P}}_{x_0} \left( \bigcup_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq k} A_n \cap [I_1 = i_1, \dots, I_n = i_n] \right) \\
&= \Delta_m(\rho_n) \tilde{\mathbb{P}}_{x_0}(\tilde{A}_n^k).
\end{aligned}$$

According to (8.8) and to (8.7), we have for all  $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}_{x_0}(\Delta_m(X_n)) = \tilde{\mathbb{E}}_{x_0}(\Delta_m(X_n)) \geq J_{n,k} \geq \Delta_m(\rho_n) \tilde{\mathbb{P}}_{x_0}(\tilde{A}_n^k).$$

We can majorize  $\Delta_m(\rho_n)$ . If we take  $k = k_n$  as in (8.6), we obtain,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\Delta_m(\rho_n) \leq \frac{1}{\tilde{\mathbb{P}}_{x_0}(\tilde{A}_n^{k_n})} \mathbb{E}_{x_0}(\Delta_m(X_n)) \leq 2 \left( \frac{1+\mu_2}{1-\mu_2} \right) \mathbb{E}_{x_0}(\Delta_m(X_n)). \quad (8.9)$$

Lemma 8.19 can be used : we know that  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}_{x_0}(\Delta_m(X_n)) = 0$ , thus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_m(\rho_n) = 0 \quad \text{and} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \rho_n \in \mathcal{S}_{\frac{1+\mu_2}{2}}. \quad (8.10)$$

where for  $\alpha \in [0, 1]$ ,

$$\mathcal{S}_\alpha := \{\rho \in \mathcal{S} \mid \text{tr}(\rho^2) \leq \alpha\} = \{\rho \in B(\mathcal{H}) \mid \rho^* = \rho, \rho \geq 0, \|\rho\|_1 = 1, \|\rho\|_2 \leq \alpha\}.$$

□

**Proposition 8.22** *Let  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be the sequences of states in  $\mathcal{S}_\alpha$  in proposition 8.21. Assume that for all  $i \in \mathbb{N}$ ,  $a_i \in \mathcal{R}$  and that  $\sqrt{x_0} \in \mathcal{R}$ , then there exists a subsequence  $(\rho_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  of  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  and  $\rho \in \mathcal{S}_\alpha$  such that :*

$$\rho_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)} \rho.$$

*Proof:* Recall that

$$\rho_n := \frac{a_{j_n} \dots a_{j_1} x_0 a_{j_1}^* \dots a_{j_n}^*}{\text{tr}(a_{j_n} \dots a_{j_1} x_0 a_{j_1}^* \dots a_{j_n}^*)}.$$

We denote

$$C_n := \frac{a_{j_n} \dots a_{j_1}}{\sqrt{\text{tr}(a_{j_n} \dots a_{j_1} x_0 a_{j_1}^* \dots a_{j_n}^*)}},$$

so that  $\rho_n = C_n x_0 C_n^* = C_n \sqrt{x_0} \sqrt{x_0} C_n^*$ . We remark that :

$$\|C_n \sqrt{x_0}\|_2 = \sqrt{\text{tr}((C_n \sqrt{x_0})^* C_n \sqrt{x_0})} = \sqrt{\text{tr}(\sqrt{x_0} C_n^* C_n \sqrt{x_0})} = \sqrt{\text{tr}(C_n x_0 C_n^*)} = 1.$$

Thus  $\|C_n \sqrt{x_0}\|_\infty \leq \|C_n \sqrt{x_0}\|_2 \leq 1$ .

$$\forall T \in B(\mathcal{H}), \text{tr}(\rho_n T) = \text{tr}(C_n x_0 C_n^* T) = \text{tr}(\sqrt{x_0} C_n^* T C_n \sqrt{x_0})$$

As  $x_0 \in B_{00}(\mathcal{H})$ , let  $(e_k)_{1 \leq k \leq N}$  be an orthonormal basis of  $\text{Ran}(x_0)$ . We have :

$$\forall T \in B(\mathcal{H}), \text{tr}(\rho_n T) = \sum_{k=1}^N \langle \sqrt{x_0} C_n^* T C_n \sqrt{x_0} e_k, e_k \rangle.$$

As  $\forall n \in \mathbb{N}, C_n \in \mathcal{R}$  and  $\sqrt{x_0} \in \mathcal{R}$  then  $C_n \sqrt{x_0} \in \text{ball}(\mathcal{R})$ . Since  $\mathcal{R}$  is a strongly compact algebra, there exists  $X \in B(\mathcal{H})$  such that :

$$C_{n_k} \sqrt{x_0} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{SOT}} X.$$

This implies that  $C_{n_k} \sqrt{x_0} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{WOT}} X$ . As the adjoint is WOT-continuous, we get :

$$(C_{n_k} \sqrt{x_0})^* = \sqrt{x_0} C_{n_k}^* \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{WOT}} X^*.$$

Thus according to 3.13, we have :

$$\sqrt{x_0} C_{n_k}^* T C_{n_k} \sqrt{x_0} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\text{WOT}} X^* T X.$$

Let  $P_N$  be the orthogonal projection on  $\text{span}\{e_1 \dots e_N\}$ . As a finite sum, we have

$$\forall T \in B(\mathcal{H}), \text{tr}(\rho_{n_k} T) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \sum_{k=1}^N \langle X^* T X e_k, e_k \rangle = \text{tr}(P_N X^* T X P_N) = \text{tr}(X P_N X^* T).$$

$X P_N X^*$  is positive and  $\text{tr}(X P_N X^*) = 1$ . Thus  $X P_N X^* \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ . According to 3.23, we have :

$$\rho_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)} \rho := X P_N X^*.$$

Moreover, we have  $\rho \in \mathcal{S}_\alpha$ . □

**Proposition 8.23** *If  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is a sequence of  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  and  $\rho$  is an element of  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  such that  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converges to  $\rho$  in  $(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$  then we have :*

$$\Delta_m(\rho) = 0.$$

*Proof:* We will show that each term in the sum (8.4) defining  $(\Delta_m(\rho_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  converges respectively to each term in the sum of  $\Delta_m(\rho)$ . At first let show :  $\forall i \in \mathbb{N}, \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{tr}(a_i \rho_{n_k} a_i^*) = \text{tr}(a_i \rho a_i^*)$ . In fact,

$$\begin{aligned} |\text{tr}(a_i \rho_{n_k} a_i^*) - \text{tr}(a_i \rho a_i^*)| &= |\text{tr}(a_i^* a_i (\rho_{n_k} - \rho))| \\ &\leq \|a_i\|_\infty \|a_i^*\|_\infty \|\rho_{n_k} - \rho\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Let us show  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \text{tr}(\rho_{n_k}^m) = \text{tr}(\rho^m)$ . From the factorization :

$$\begin{aligned} \rho^m - \rho_{n_k}^m &= (\rho - \rho_{n_k})(\rho^{m-1} + \rho^{m-2} \rho_{n_k} + \dots + \rho \rho_{n_k}^{m-2} + \rho_{n_k}^{m-1}) \\ &\quad - \rho^{m-1} \rho_{n_k} - \dots - \rho \rho_{n_k}^{m-2} - \rho_{n_k}^{m-1} \\ &\quad + \rho_{n_k} \rho^{m-1} + \rho_{n_k} \rho^{m-2} \rho_{n_k} + \dots + \rho_{n_k} \rho \rho_{n_k}^{m-2}, \end{aligned}$$

and trace cyclicity, we have :

$$\begin{aligned} |\text{tr}(\rho^m - \rho_{n_k}^m)| &= |\text{tr}((\rho - \rho_{n_k})(\rho^{m-1} + \rho^{m-2} \rho_{n_k} + \dots + \rho \rho_{n_k}^{m-2} + \rho_{n_k}^{m-1}))| \\ &\leq \|\rho - \rho_{n_k}\|_1 \|(\rho^{m-1} + \rho^{m-2} \rho_{n_k} + \dots + \rho \rho_{n_k}^{m-2} + \rho_{n_k}^{m-1})\|_\infty \\ &\leq \|\rho - \rho_{n_k}\|_1 m \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Let show lastly that,  $\forall m \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}, \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{tr}((a_i \rho_{n_k} a_i^*)^m) = \text{tr}((a_i \rho a_i^*)^m)$ . Using the same type of factorization on  $(a_i \rho a_i^*)^m - (a_i \rho_{n_k} a_i^*)^m$  and trace cyclicity, we get :

$$|\text{tr}((a_i \rho a_i^*)^m - (a_i \rho_{n_k} a_i^*)^m)| \leq m \|a_i\|_\infty^{2m} \|\rho - \rho_{n_k}\|_1 \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

The result follows from the definition (8.4) of  $\Delta_m$  and Fatou lemma :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \text{tr}(a_i \rho_{n_k} a_i^*) \left( \text{tr} \left( \frac{(a_i \rho_{n_k} a_i^*)}{\text{tr}(a_i \rho_{n_k} a_i^*)} \right)^m - \text{tr}(\rho_{n_k}^m) \right)^2 \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \Delta(\rho_{n_k}).$$

As  $\liminf_{k \rightarrow +\infty} \Delta(\rho_{n_k}) = 0$ , we have  $\Delta(\rho) = 0$ . □

### 8.5.2 An application of the Poisson boundary of a quantum channel

This subsection is devoted to prove a proposition by using the Poisson boundary of a quantum channel. This proposition will be used in the proof of theorem 8.5. We denote by  $a \sim b$  unitary equivalence of two operators  $a$  and  $b$  of  $B(\mathcal{H})$ .

**Proposition 8.24** *Let  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ , denote by  $p$  the support of  $\rho$  i.e. a projection which verifies  $p\rho p = \rho$ . Assume that :*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho} \sim \lambda_i \rho \tag{8.11}$$

where  $\forall i \in \mathbb{N}, \lambda_i = \text{tr}(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho}) \geq 0$ , then we have

$$\forall i \in \mathbb{N}, p a_i^* a_i p = \lambda_i p.$$

*Proof:* By hypothesis of unitary equivalence, for all  $i \in \mathbb{N}$ , there exists a unitary operator  $u_i \in B(\mathcal{H})$  such that :

$$\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho} = \lambda_i u_i \rho u_i^*. \tag{8.12}$$



By summing on  $i \in \mathbb{N}$ , we obtain :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{+\infty} \sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho} &= \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i u_i \rho u_i^* \\ \sqrt{\rho} \sum_{i=1}^{+\infty} (a_i^* a_i) \sqrt{\rho} &= \sum_{i=1}^{+\infty} (\sqrt{\lambda_i} u_i) \rho (\sqrt{\lambda_i} u_i^*) \\ \rho &= \sum_{i=1}^{+\infty} (\sqrt{\lambda_i} u_i) \rho (\sqrt{\lambda_i} u_i^*), \end{aligned}$$

because  $\sum_{i=1}^{+\infty} (a_i^* a_i) = I$ .

Consequently  $\rho$  is a fixed point of the application  $M$  defined by :

$$M : B(\mathcal{H}) \ni x \longmapsto M(x) := \sum_{i=1}^{+\infty} (\sqrt{\lambda_i} u_i) x (\sqrt{\lambda_i} u_i)^* \in B(\mathcal{H}).$$

Notice that, as  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_i = \text{tr}(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho}) \geq 0$ , hence

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(a_i^* a_i \rho) = \text{tr} \left( \sum_{i=1}^{+\infty} (a_i^* a_i) \rho \right) = \text{tr}(\rho) = 1.$$

Since  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  are unitary operators, we have :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} (\sqrt{\lambda_i} u_i) (\sqrt{\lambda_i} u_i)^* = \sum_{i=1}^{+\infty} (\sqrt{\lambda_i} u_i)^* (\sqrt{\lambda_i} u_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i I = I.$$

The previous results and theorem 9.2 imply that the mapping  $M$  is a normal completely positive, unital and trace preserving map i.e. a quantum channel. Thus  $\rho$  is a fixed point of the quantum channel  $M$  and is also a trace-class operator. The theorem 6.20 implies that  $\rho$  commutes with all  $\sqrt{\lambda_i} u_i$  and  $(\sqrt{\lambda_i} u_i)^*$  i.e. :

$$\rho \in \{ \sqrt{\lambda_i} u_i, (\sqrt{\lambda_i} u_i)^* \}' ,$$

the equality (8.12) can be rewritten :

$$\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho} = \lambda_i u_i \rho u_i^* = \lambda_i u_i u_i^* \rho = \lambda_i \rho.$$

If we denote  $p$  the support of  $\rho$ , then  $p$  is also the support of  $\sqrt{\rho}$ . Thus, by the spectral decomposition for  $\rho$  and  $\sqrt{\rho}$ , we get :

$$p a_i^* a_i p = \lambda_i p.$$

□

### 8.5.3 Properties of a mixed quantum measurement

We reformulate theorem 8.5 by using the notion of mixed measurement :

**Theorem 8.25** *Let  $\mathcal{R}$  be a strongly compact algebra of  $B(\mathcal{H})$ , we define  $\mathcal{D} := \{x \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \cap B_{00}(\mathcal{H}) | \sqrt{x} \in \mathcal{R}\}$ . Consider a quantum measurement defined by  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B(\mathcal{H})$  with  $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^* a_i = I$  such that for all  $i \in \mathbb{N}$ ,  $a_i \in \mathcal{R}$ . If this quantum measurement is asymptotically mixed on  $\mathcal{D}$  then there is a projection  $p \in B(\mathcal{H})$  with  $\dim(\text{rank}(p)) \geq 2$  such that :*

$$\forall i \in \mathbb{N}, \exists \lambda_i \geq 0, p a_i^* a_i p = \lambda_i p.$$

*Proof:* Since the quantum measurement is mixed, proposition 8.21 implies that there exists a sequence  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of states in  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  such that :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_m(\rho_n) = 0 \quad \text{and} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{tr}(\rho_n^2) \leq \frac{1 + \mu_2}{2}.$$

From proposition 8.21 and 8.22, for  $\alpha := \frac{1 + \mu_2}{2} < 1$ , there exist a  $\rho \in \mathcal{S}_\alpha$  and a subsequence  $(\rho_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  of  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  such that :

$$\rho_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{(B_1(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)} \rho.$$

Proposition 8.23 implies :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta_m(\rho_{n_k}) = \Delta_m(\rho).$$

Thus for all  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\Delta_m(\rho) = \sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(a_i \rho a_i^*) \left( \text{tr} \left( \frac{(a_i \rho a_i^*)^m}{\text{tr}(a_i \rho a_i^*)} \right) - \text{tr}(\rho^m) \right)^2 = 0. \quad (8.13)$$

Let notice that for all  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \text{tr}(a_i \rho a_i^*) &= \text{tr}(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho}) \\ \text{tr}((a_i \rho a_i^*)^m) &= \text{tr}((\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho})^m). \end{aligned}$$

Thus (8.13) can be reformulated as :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho}) \left( \text{tr} \left( \frac{(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho})^m}{\text{tr}(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho})} \right) - \text{tr}(\rho^m) \right)^2 = 0.$$

This equality implies :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \text{tr}(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho}) \left( \text{tr} \left( \frac{(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho})^m}{\text{tr}(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho})} \right) - \text{tr}(\rho^m) \right)^2 = 0.$$

If for  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\text{tr}(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho}) = 0$  then  $\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho} = 0$  else

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \text{tr} \left( \frac{(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho})^m}{\text{tr}(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho})} \right) = \text{tr}(\rho^m).$$

Thus,  $\frac{\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho}}{\text{tr}(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho})}$  and  $\rho$  have the same moments. 3.11 implies that  $\frac{\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho}}{\text{tr}(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho})}$  and  $\rho$  are unitarily equivalent :

$$\frac{(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho})}{\text{tr}(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho})} \sim \rho.$$

In all cases,  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,

$$\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho} \sim \lambda_i \rho. \quad (8.14)$$

where  $\forall i \in \mathbb{N}, \lambda_i = \text{tr}(\sqrt{\rho} a_i^* a_i \sqrt{\rho}) \geq 0$ . By applying proposition 8.24, if  $p$  denotes the support of  $\rho$ , we have :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad p a_i^* a_i p = \lambda_i p.$$

As  $\rho$  is a mixed state, its support  $p$  verifies  $\text{rank}(p) \geq 2$ . □

**Remark 8.26** *The converse of theorem 8.25 is not true. We give a counterexample due to Hans Maassen. We denote  $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$  the canonical basis of  $M_4(\mathbb{C})$  and we consider the quantum measurement defined by :*

$$a_1 = E_{31} + E_{42}, \quad a_2 = E_{34}, \quad a_3 = E_{43}.$$

We define  $p = E_{11} + E_{22}$  then :

$$pa_1^*a_1p = p, \quad pa_2^*a_2p = 0, \quad pa_3^*a_3p = 0,$$

and the quantum measurement is pure.

Yet, we can give a partial converse of theorem 8.25 :

## 8.6 Ergodicity of the quantum trajectory

Ergodicity of quantum trajectory has already been studied in the case of finite dimension in [47]. Here we generalize these results in infinite dimension yielding some new insight.

### 8.6.1 Stationary normal states

**Definition 8.27 (Stationary normal states)** *Consider a quantum measurement defined by  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B(\mathcal{H})$  the average measurement is  $\Phi : x \in B(\mathcal{H}) \rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} a_i x a_i^* \in B(\mathcal{H})$ . A normal state  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ , viewed as a positive linear functional, is a stationary state if and only if,  $\rho$  is a fixed point of  $\Phi$  i.e.  $\Phi(\rho) = \rho$ , where  $\Phi$  is the average covariant measurement (see definition 8.4). We denote by  $\text{Fix}(\Phi)$  the set of fixed points of  $\Phi$ .*

The contravariant average measurement  $\Psi : x \in B(\mathcal{H}) \rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^* x a_i \in B(\mathcal{H})$  is a normal completely positive map which is unital. The properties of  $\Psi$  will be useful later. In the particular case where  $\Phi$  is unital and trace preserving, the set of fixed points of  $\Phi$  in  $B_1(\mathcal{H})$  are characterized by theorem 6.19, this enables us to characterize stationary states in this particular case.

**Proposition 8.28** *Consider a quantum measurement defined by  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in B(\mathcal{H})$  with  $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^* a_i = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i a_i^* = I$ . Then the set of normal stationary states is :*

$$\text{Fix}(\Psi) \cap B_1(\mathcal{H}) = \{a_i, a_i^*\}' \cap B_1(\mathcal{H})$$

where  $\{a_i, a_i^*\}'$  denotes the commutant of the  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  and  $(a_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$ .

### 8.6.2 Ergodic theorem

**Theorem 8.29** *Let  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be the quantum trajectory starting at state  $x_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ , then there exists a random variable  $X_\infty$  which takes values in stationary states such that :*

$$\text{WOT}^* \text{-} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n = X_\infty \quad \mathbb{P}_{x_0} \text{-almost surely.}$$

The scheme of the proof is the same as the proof of Kümmerer in finite dimension [47] which uses ergodic theorem 8.33 in finite dimension. We will now consider normal states as positive linear functionals. The associated positive linear functional with  $X_n$  is

$$\xi_{X_n} : B(\mathcal{H}) \ni x \rightarrow \xi_{X_n}(x) := \text{tr}(X_n x) \in \mathbb{C}.$$

Before giving the proof of theorem 8.29, we need some intermediate results  $(\xi_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$  is a weak- martingale taking values in the set positive linear functionals.

**Proposition 8.30** *Let  $P$  be the projection of  $B(\mathcal{H})$  onto  $\text{Fix}(\Psi)$ , the set of fixed points of  $\Psi$ , then*

$$\text{SOT-} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \Psi^n = P.$$

*Proof:* Since  $\Psi$  is a completely positive map and it is then a positive map. Thus  $\|\Psi\| = \|\Psi(I)\| = \|I\| = 1$  [60]. We can apply theorem 8.33 to  $\Psi$  and conclude.  $\square$

**Proposition 8.31** *Let  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  be the quantum trajectory starting at state  $x_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ , let  $x$  be an element in  $B(\mathcal{H})$ , then  $(\xi_{X_n}(Px))_{n \in \mathbb{N}} := (\text{tr}(X_n Px))_{n \in \mathbb{N}}$  converges  $\mathbb{P}_{x_0}$ -almost surely to a random variable  $\xi_\infty(x)$ .*

*Proof:* Show first that  $(\xi_{X_n}(Px))_{n \in \mathbb{N}}$  is a martingale. In fact :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{tr}(X_{n+1}Px) | \mathcal{F}_n) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(a_i X_n a_i^*) \text{tr}\left(\frac{a_i X_n a_i^*}{\text{tr}(a_i X_n a_i^*)} Px\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(a_i X_n a_i^* Px) \\ &= \text{tr}(X_n \Psi(Px)) = \text{tr}(X_n Px). \end{aligned}$$

The last equality comes from the fact that  $Px$  is a fixed point of  $\Psi$ . Moreover

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\xi_{X_n}(Px)| = |\text{tr}(X_n Px)| \leq \|X_n\|_1 \|Px\|_\infty \leq \|Px\|_\infty.$$

Thus  $(\xi_{X_n}(Px))_{n \in \mathbb{N}}$  is a uniformly bounded martingale. The martingale convergence theorem [57] implies the existence of a random variable  $\xi_\infty(x)$  on  $\Omega$  such that  $(\xi_{X_n}(Px))_{n \in \mathbb{N}} := (\text{tr}(X_n Px))_{n \in \mathbb{N}}$  converges  $\mathbb{P}_{x_0}$ -almost surely and in  $L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_{x_0})$  to the random variable  $\xi_\infty(x)$ .  $\square$

**Proposition 8.32** *Let  $(X_n)$  be the quantum trajectory starting at  $x_0 \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ , let  $x \in B(\mathcal{H})$ , and define*

$$\forall n \in \mathbb{N}, D_{n+1}(x) := \text{tr}(X_{n+1}x) - \text{tr}(X_n \Psi(x))$$

*then  $(D_n)$  is a sequence of random variables such that :*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N D_{n+1}(x) = 0 \quad \mathbb{P}_{x_0}\text{-almost surely.}$$

*Proof:* We show at first that  $(D_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  is a sequence of conditionally centered random variables. In fact,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(D_{n+1}(x) | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(\text{tr}(X_{n+1}x) - \text{tr}(X_n \Psi(x)) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\text{tr}(X_{n+1}x) | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(\text{tr}(X_n \Psi(x)) | \mathcal{F}_n) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(a_i X_n a_i^*) \text{tr}\left(\frac{a_i X_n a_i^*}{\text{tr}(a_i X_n a_i^*)} x\right) - \text{tr}(X_n \Psi(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \text{tr}(a_i X_n a_i^* x) - \text{tr}(X_n \Psi(x)) = \text{tr}\left(X_n \sum_{i=1}^{+\infty} a_i^* x a_i\right) - \text{tr}(X_n \Psi(x)) \\ &= \text{tr}(X_n \Psi(x)) - \text{tr}(X_n \Psi(x)) = 0. \end{aligned}$$

Thus  $M_n := \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} D_j(x)$  is a martingale. Additionally, for all  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} |D_{n+1}| &= |\operatorname{tr}(X_{n+1}x) - \operatorname{tr}(X_n\Psi(x))| \\ &\leq |\operatorname{tr}(X_{n+1}x)| + |\operatorname{tr}(X_n\Psi(x))| \leq \|X_{n+1}\|_1 \|x\|_\infty + \|X_n\|_1 \|x\|_\infty \\ &\leq 2\|x\|_\infty, \end{aligned}$$

because  $\|X_n\|_1 = \|X_{n+1}\|_1 = 1$ . By taking the expectation in both side of the last inequality, we have :

$$\mathbb{E}(|D_j|^2) \leq 4\|x\|_\infty^2.$$

Thus  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{E}_{x_0}(M_n^2) \leq 4\|x\|_\infty^2 \frac{\pi^2}{6}$ .  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is a bounded martingale in  $L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_{x_0})$ , hence bounded in  $L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}_{x_0})$  by monotonicity of norms. Martingale convergence theorem [57] insures that :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1} D_{j+1}(x) = M_\infty \quad \mathbb{P}_{x_0}\text{-almost surely},$$

where  $M_\infty$  is a random variable. According to Kronecker's lemma [57], we have :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D_n(x) = 0 \quad \mathbb{P}_{x_0}\text{-almost surely}.$$

*Proof of the theorem 8.29 :* In the last proposition, we have shown that :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (\operatorname{tr}(X_{n+1}x) - \operatorname{tr}(X_n\Psi(x))) = 0 \quad \mathbb{P}_{x_0}\text{-almost surely}.$$

By taking away two terms which converge almost surely to 0 when  $N$  is large, the previous relation implies the convergence :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\operatorname{tr}(X_n x) - \operatorname{tr}(X_n \Psi(x))) = 0 \quad \mathbb{P}_{x_0}\text{-almost surely}.$$

This convergence is valid for all  $x \in B(\mathcal{H})$ . Applying it on  $\Psi^k(x)$  for all  $k \in \mathbb{N}$ , we get

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\operatorname{tr}(X_n \Psi^k(x)) - \operatorname{tr}(X_n \Psi^{k+1}(x))) = 0 \quad \mathbb{P}_{x_0}\text{-almost surely}.$$

For an integer  $m \in \mathbb{N}$ , summing  $k$  from 0 to  $m-1$ , we get

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\operatorname{tr}(X_n \Psi^k(x)) - \operatorname{tr}(X_n \Psi^{k+1}(x))) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\operatorname{tr}(X_n x) - \operatorname{tr}(X_n \Psi^m(x))).$$

Hence :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\operatorname{tr}(X_n x) - \operatorname{tr}(X_n \Psi^m(x))) = 0 \quad \mathbb{P}_{x_0}\text{-almost surely}.$$

Let consider the Cesàro mean on the index  $m$ , we still have the convergence :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left( \operatorname{tr}(X_n x) - \operatorname{tr} \left( X_n \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \Psi^m(x) \right) \right) = 0 \quad \mathbb{P}_{x_0}\text{-almost surely}.$$

By taking the limit for  $M$  large, we have :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{tr}(X_n x) - \text{tr} \left( X_n \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \Psi^m(x) \right) \right) = 0 \quad \mathbb{P}_{x_0}\text{-almost surely.}$$

The idea is to intertwine the two limits. Denote for all  $N, M \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} f_M(N) &:= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left( \text{tr}(X_n x) - \text{tr} \left( X_n \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \Psi^m(x) \right) \right) \\ f(N) &:= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\text{tr}(X_n x) - \text{tr}(X_n P x)). \end{aligned}$$

Let us show that  $(f_M(N))_{M \in \mathbb{N}}$  converges uniformly to  $f(N)$  on  $\mathbb{N}$ . In fact :

$$\begin{aligned} |f_M(N) - f(N)| &= \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{tr} \left( X_n \left( \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \Psi^m(x) - P x \right) \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \|X_n\|_1 \left\| \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \Psi^m(x) - P x \right\|_{\infty} \\ &\leq \left\| \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \Psi^m(x) - P x \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

The last term of the inequality does not depend on  $N$  and converges to 0 according to the ergodic theorem 8.33. Thus  $(f_M(N))_{M \in \mathbb{N}}$  converges uniformly to  $f(N)$  on  $\mathbb{N}$ . Yet we know that for all  $M \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{N \rightarrow +\infty} f_M(N) = 0$ , we can intertwine limits and conclude that  $\lim_{N \rightarrow +\infty} f(N) = 0$ , i.e.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\text{tr}(X_n x) - \text{tr}(X_n P x)) = 0 \quad \mathbb{P}_{x_0}\text{-almost surely.} \quad (8.15)$$

According to proposition 8.31,  $(\text{tr}(X_n P x))_{n \in \mathbb{N}}$  converges  $\mathbb{P}_{x_0}$ -almost surely to a random variable  $\xi_{\infty}(x)$ . Thus we have :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{tr}(X_n P x) \right) = \xi_{\infty}(x) \quad \mathbb{P}_{x_0}\text{-almost surely.}$$

According to (8.15), this implies the convergence :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_{X_n}(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \text{tr}(X_n x) = \xi_{\infty}(x) \quad \mathbb{P}_{x_0}\text{-almost surely.}$$

Hence, the sequence  $(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$  of normal states converges  $*$ -weakly on  $B(\mathcal{H})$  to the linear functional  $\xi_{\infty}$ . We deduce that  $\xi_{\infty}$  is a normal state on  $B(\mathcal{H})$ . Thus there is a unique  $X_{\infty} \in B_1(\mathcal{H})$  with  $\text{tr}(X_{\infty}) = 1$  corresponding to  $\xi_{\infty}$  by duality. We conclude that

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\text{WOT}^*} X_{\infty} \quad \mathbb{P}_{x_0}\text{-almost surely.}$$

We verify that  $X_\infty$  is a stationary state by showing that  $\Phi(X_\infty) = X_\infty$ . For all  $x \in B(\mathcal{H})$ ,

$$\begin{aligned} \text{tr}(X_\infty \Psi(x)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{tr}(X_n P \Psi(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{tr}(X_n \Psi(Px)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{tr}(X_n Px) = \text{tr}(X_\infty x) \end{aligned} \quad (8.16)$$

Yet by definition of  $\Psi$  and  $\Phi$ , we have :

$$\forall x \in B(\mathcal{H}), \text{tr}(X_\infty \Psi(x)) = \text{tr}(\Phi(X_\infty)x) = \text{tr}(X_\infty x)$$

Since  $\Phi(X_\infty)$  and  $X_\infty$  are normal states, by unicity we have :

$$\Phi(X_\infty) = X_\infty.$$

Thus  $X_\infty$  is a stationary state. □

## 8.7 Conclusion

Generalizing results from finite dimension to infinite-dimension, in quantum measurement theory and in quantum information theory, is useful, because most real systems quantum are described in an infinite-dimension Hilbert space [12]. Poisson boundary of quantum channels plays a fundamental role in these theories : its properties were exploited in this article. The study of Poisson boundary of quantum channels is the object of [51], where we identify theoretically its Poisson boundary and answer negatively to some conjectures about injectivity and the injective envelope of the commutant of Kraus operators of a unital quantum operation.

## 8.8 Acknowledgements

The author wishes to thank Dimitri P  tritis and Bachir Bekka for their advise and the IRMAR for the stimulating atmosphere and the quality of working conditions.

## 8.9 Appendix

Recall ergodic theorem :

**Theorem 8.33** [78] *Let  $T$  be a bounded operator of  $B(\mathcal{H})$  such that  $\|T\|_\infty \leq 1$ , then we have the SOT convergence of the Cesàro mean of  $T$  to  $P$ , where  $P$  is the projection onto  $\text{Fix}(T)$  i.e.*

$$\text{SOT-} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} T^n = P.$$

## Chapitre 9

# Poisson boundaries of quantum operations

Ce chapitre est la reproduction de l'article "Non commutative Poisson boundaries of unital quantum operations" publié dans J. Math. Phys. 51, 052202 (2010).

### Abstract :

In this paper, Poisson boundaries of unital quantum operations (also called Markov operators) are investigated. In the case of unital quantum channels, compact operators belonging to Poisson boundaries are characterized. Using the characterization of amenable groups by the injectivity of their von Neumann algebras, we will answer negatively some conjectures appearing in [4] about injectivity of the commuting algebra of the Kraus operators of unital quantum operations and their injective envelopes.

### 9.1 Introduction

Unital quantum operations, also known as Markov operators play a fundamental role in quantum information theory and in quantum measurement theory. In quantum information theory, they describe the transfer of quantum information [59, 44]. In measurement theory, they describe quantum measurements on a physical system [47].

Let  $\mathcal{K}$  be a separable Hilbert space and  $B(\mathcal{K})$  be the von Neumann algebra of the bounded operators on  $\mathcal{K}$ . A quantum operation  $\Phi$  is defined by a normal completely positive map acting on  $B(\mathcal{K})$  which preserves the identity  $I_{\mathcal{K}}$  of  $B(\mathcal{K})$ . Our main interest is to describe the set of the fixed points of a quantum operation, which is also called the **Poisson boundary** of  $\Phi$  :

$$\text{Fix}(\Phi) = \{X \in B(\mathcal{K}) \mid \Phi(X) = X\}.$$

This set has several meanings. For example in the case of quantum information theory it represents information unharmed by the operation. The Poisson boundary of a quantum operation is useful in the theory of error correction [12]. In the case of quantum measurement theory, this set contains stationary states of the quantum system under study [47].

This paper is organized as follows. In section 9.2, we recall some properties of normal completely positive maps. In section 9.3, the Poisson boundary in the case of a trace preserving quantum operation is studied. We identify elements of the Poisson boundary of



a trace preserving quantum operation among compact operators (Theorem 9.6). Section 9.4 deals with the non-commutative Poisson boundary associated with random walks on a discrete group, which provide a class of interesting examples. In the last section, the classical Poisson boundary of some amenable groups is used in order to answer to the negative conjectures from [4], about injectivity of the commuting algebra of the Kraus operators of a quantum operation and its injective envelope (Theorem 9.16).

## 9.2 Background

Let  $n \geq 1$  be an integer, denote by  $\mathcal{M}_n(B(\mathcal{K}))$  the von Neumann algebra of square matrices of length  $n$  whose entries are in  $B(\mathcal{K})$ . Let  $\Phi : B(\mathcal{K}) \ni x \rightarrow \Phi(x) \in B(\mathcal{K})$  be a continuous linear map.  $\Phi$  induces a map

$$\Phi^{(n)} : \mathcal{M}_n(B(\mathcal{K})) \ni (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \rightarrow (\Phi(a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(B(\mathcal{K}))$$

**Definition 9.1** *A linear map  $\Phi : B(\mathcal{H}) \ni x \rightarrow \Phi(x) \in B(\mathcal{K})$  is said to be completely positive if for all  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Phi^{(n)}$  is positive.*

Let us remark that completely positive maps can be defined more generally on operator systems [21]. Normal completely positive maps on  $B(\mathcal{K})$  were characterized in [27] as follows :

**Theorem 9.2** [27] *Let  $\Phi : B(\mathcal{K}) \ni x \rightarrow \Phi(x) \in B(\mathcal{K})$  be a linear map, then  $\Phi$  is a normal completely positive map on  $B(\mathcal{K})$  if and only if there exists a sequence  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  of  $B(\mathcal{K})$  such that for all  $x \in B(\mathcal{K})$ ,*

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} T_i x T_i^*.$$

The sequence  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  is not necessary unique and the limit is taken in the strong operator topology (SOT). In the case where  $\mathcal{K}$  is of finite dimension  $k$ , the sequence  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  can be chosen such that  $T_i = 0$  if  $i > k^2$  (see [17]).

Let  $\Phi : B(\mathcal{K}) \ni x \rightarrow \Phi(x) \in B(\mathcal{K})$  be a normal completely positive map on  $B(\mathcal{K})$  and  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  be a sequence as in theorem 9.2. Denote  $\mathcal{A} := \text{span}\{T_i, T_i^*\}$  the linear space spanned by  $\{T_i, T_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ . The family  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  is called a family of **Kraus operators** for  $\Phi$ . The commutant  $\mathcal{A}'$  of  $\mathcal{A}$  is the set of elements of  $B(\mathcal{K})$  that commute with  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  and  $(T_i^*)_{i \in \mathbb{N}}$  :

$$\mathcal{A}' := \{T_i, T_i^*\}'_{i \in \mathbb{N}}.$$

**Definition 9.3** *Let  $\Phi$  be a normal completely positive map and  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$  be a sequence as in theorem 9.2. We say that :*

1.  $\Phi$  is **unital** if  $\Phi(I_{\mathcal{K}}) = I_{\mathcal{K}}$  i.e.  $\sum_{i=1}^{+\infty} T_i T_i^* = I_{\mathcal{K}}$ .
2.  $\Phi$  is **trace preserving** if  $\sum_{i=1}^{+\infty} T_i^* T_i = I_{\mathcal{K}}$ .

A normal completely positive map which is unital and trace preserving is called a **quantum channel**. A normal completely positive map which is unital, but not necessary trace preserving is called a **quantum operation** or a **Markov operator**.

**Definition 9.4 (Poisson boundary of a unital quantum operation)** *Let  $\Phi$  be a quantum operation, the Poisson boundary of  $\Phi$  is the subspace of fixed points of  $\Phi$  :*

$$\text{Fix}(\Phi) = \{X \in B(\mathcal{K}) \mid \Phi(X) = X\}.$$

**Proposition 9.5** [15] *Let  $\Phi : B(\mathcal{K}) \ni x \rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} T_i x T_i^* \in B(\mathcal{K})$  be a quantum operation then the commutant  $\mathcal{A}'$  of the Kraus operators of  $\Phi$  is a von Neumann algebra, such that  $\mathcal{A}' \subset \text{Fix}(\Phi)$ . The largest  $C^*$ -algebra contained in  $\text{Fix}(\Phi)$  is  $\mathcal{A}'$  and there is equality if and only if  $\text{Fix}(\Phi)$  is a  $C^*$ -subalgebra of  $B(\mathcal{K})$ .*

One of our purposes is to compare  $\mathcal{A}'$  and  $\text{Fix}(\Phi)$ . In particular, we ask under which conditions, do we have equality between these two sets?

### 9.3 Unital quantum channels

Poisson boundaries of quantum operations which are trace preserving are now investigated. Recall that trace preserving quantum operations are called quantum channels. Poisson boundaries of unital quantum channels were characterized in finite dimension in [44] and in infinite dimension when restricted to trace-class operators in [4].

The main result of this section is to identify elements of the Poisson boundary among the set of compact operators on  $\mathcal{K}$ . Let denote by  $B_0(\mathcal{K})$  this set.

**Theorem 9.6** *Let  $\Phi : B(\mathcal{K}) \ni x \rightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} T_i x T_i^* \in B(\mathcal{K})$  be a unital quantum channel, then*

$$\{T_i, T_i^*\}' \cap B_0(\mathcal{K}) = \text{Fix}(\Phi) \cap B_0(\mathcal{K}).$$

*Proof:* The idea of the proof is based on the proof in finite dimension [44]. The inclusion  $\{T_i, T_i^*\}' \subset \text{Fix}(\Phi)$  has already been seen. Hence we have the inclusion  $\{T_i, T_i^*\}' \cap B_0(\mathcal{K}) \subset \text{Fix}(\Phi) \cap B_0(\mathcal{K})$ .

Let show  $\text{Fix}(\Phi) \cap B_0(\mathcal{K}) \subset \{T_i, T_i^*\}' \cap B_0(\mathcal{K})$ . Let  $X \in \text{Fix}(\Phi) \cap B_0(\mathcal{K})$ , we notice by using the definition of  $\Phi$  that  $X^*$  is also a fixed point of  $\Phi$ . By writing  $X = \text{Re}(X) + i \text{Im}(X)$ , where  $\text{Re}(X) := \frac{X+X^*}{2}$  and  $\text{Im}(X) := \frac{X-X^*}{2i}$ .  $\text{Re}(X)$  and  $\text{Im}(X)$  are two self-adjoint operators that are fixed by  $\Phi$ . This decomposition allows us to assume that  $X$  is a compact self-adjoint operator. The spectral theorem applied on  $X$  gives :

$$X = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k P_k + \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k Q_k,$$

where  $(\lambda_k)$  and  $(\mu_k)$  are respectively the sequence of positive eigenvalues and the sequence of negative eigenvalues of  $X$  such that for all  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k < 0 < \lambda_k < \dots < \lambda_2 < \lambda_1,$$

where  $(P_k)$  and  $(Q_k)$  are the sequences of finite rank spectral projections associated respectively with the eigenvalues  $(\lambda_k)$  and  $(\mu_k)$ . Consider the positive self-adjoint operator  $Y := X + \|X\|_\infty I_{\mathcal{K}}$  which is in  $\text{Fix}(\Phi)$ . The spectral decomposition of  $Y$  is :

$$Y = \sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda_k + \|X\|_\infty) P_k + \sum_{k=1}^{+\infty} (\mu_k + \|X\|_\infty) Q_k + \|X\|_\infty R_0,$$

where  $R_0$  is the spectral projection of  $X$  associated with 0.

Let show that for all  $k$ ,  $P_k \in \{T_i, T_i^*\}' \subset \text{Fix}(\Phi)$ . We denote by  $\mathcal{K}_k := \{\xi \in \mathcal{K} \mid Y\xi = (\lambda_k + \|X\|_\infty)\xi\}$  the eigenspace of  $Y$  associated with the eigenvalue  $\lambda_k + \|X\|_\infty$ . Let  $\xi \in \mathcal{K}_1$ ,

by using  $\|Y\xi\| \leq \|Y\|_\infty \|\xi\| = (\lambda_1 + \|X\|_\infty) \|\xi\|$  and Cauchy-Schwarz inequality,

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 + \|X\|_\infty) \langle \xi | \xi \rangle &= \langle Y\xi | \xi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{+\infty} T_i Y T_i^* \xi | \xi \right\rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle T_i Y T_i^* \xi | \xi \rangle = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle Y T_i^* \xi | T_i^* \xi \rangle \\
&\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \|Y T_i^* \xi\| \|T_i^* \xi\| \leq \sum_{i=1}^{+\infty} (\lambda_1 + \|X\|_\infty) \|T_i^* \xi\| \|T_i^* \xi\| \\
&= (\lambda_1 + \|X\|_\infty) \sum_{i=1}^{+\infty} \langle T_i^* \xi | T_i^* \xi \rangle = (\lambda_1 + \|X\|_\infty) \left\langle \xi | \sum_{k=1}^{+\infty} T_k T_k^* \xi \right\rangle \\
&= (\lambda_1 + \|X\|_\infty) \langle \xi | \xi \rangle.
\end{aligned}$$

We deduce that all inequalities are equalities. By using the case of equality in Cauchy-Schwarz inequality, we obtain for all  $i \in \mathbb{N}$

$$Y T_i^* \xi = (\lambda_1 + \|X\|_\infty) T_i^* \xi.$$

Thus for all  $i \in \mathbb{N}$ ,  $T_i^* \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_1$ . Hence

$$\forall i \in \mathbb{N}, T_i^* P_1 = P_1 T_i^* P_1 \text{ i.e. } P_1 T_i = P_1 T_i P_1. \quad (9.1)$$

Let define the unital quantum channel  $\Phi^* : B(\mathcal{K}) \ni x \longrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} T_i^* x T_i \in B(\mathcal{K})$ . We remark by using (9.1) :

$$\Phi^*(P_1) = \sum_{i=1}^{+\infty} T_i^* P_1 T_i = \sum_{i=1}^{+\infty} P_1 T_i^* P_1 T_i P_1 = P_1 \Phi^*(P_1) P_1 \leq P_1 \Phi^*(I_{\mathcal{K}}) P_1 = P_1.$$

As  $P_1$  and  $\Phi^*(P_1)$  are positive trace-class operators (because  $P_1$  is finite rank) and  $\text{tr}(\Phi^*(P_1)) = \text{tr}(P_1)$ , we deduce that :

$$\Phi^*(P_1) = P_1.$$

This equality implies  $\Phi^*(I_{\mathcal{K}} - P_1) = I_{\mathcal{K}} - P_1$ . We remark that for all  $i \in \mathbb{N}$

$$0 \leq (P_1 T_i^* (I_{\mathcal{K}} - P_1)) (P_1 T_i^* (I_{\mathcal{K}} - P_1))^* = P_1 T_i^* (I_{\mathcal{K}} - P_1) T_i P_1.$$

By summing the right side for  $i \in \mathbb{N}$ , we get :

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P_1 T_i^* (I_{\mathcal{K}} - P_1) T_i P_1 = P_1 \Phi^*(I_{\mathcal{K}} - P_1) P_1 = P_1 (I_{\mathcal{K}} - P_1) P_1 = 0$$

Thus for all  $i \in \mathbb{N}$ ,  $P_1 T_i^* (I_{\mathcal{K}} - P_1) = 0$ , this gives :

$$\forall i \in \mathbb{N}, T_i P_1 = P_1 T_i P_1. \quad (9.2)$$

By using (9.1) and (9.2), we have :

$$P_1 \in \{T_i, T_i^*\}' \subset \text{Fix}(\Phi).$$

By considering  $Y - (\lambda_1 + \|X\|_\infty) P_1$  which is a fixed point of  $\Phi$ , we show in the same way that  $P_2 \in \{T_i, T_i^*\}' \subset \text{Fix}(\Phi)$ . A recurrence proves that for all  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$P_k \in \{T_i, T_i^*\}'.$$

This implies that  $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k P_k \in \{T_i, T_i^*\}' \subset \text{Fix}(\Phi)$ . Hence the positive compact operator  $\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k P_k - X = -\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k Q_k$  is also in  $\text{Fix}(\Phi)$ . We apply the same technique to prove that for all  $k \in \mathbb{N}$ ,  $Q_k \in \{T_i, T_i^*\}' \subset \text{Fix}(\Phi)$ . We conclude that  $X \in \{T_i, T_i^*\}'$ .  $\square$

A example due to Arias, Gheonda and Gudder, (in [4] page 5879) shows there exists a unital quantum channel such that its Poisson boundary is different from  $\mathcal{A}'$ . In this example, a unital quantum channel is introduced by using the action of the free group with two generators  $\mathbb{F}_2$ . This example leads us to a generalization to any discrete group in the next section.

## 9.4 Poisson boundaries associated with random walks on a discrete group

The purpose of this section is to give a class of unital quantum channels based on the study of Poisson boundaries associated with random walks on a discrete group.

### 9.4.1 The right convolution operator

Let  $G$  be a discrete group and  $\mu$  a probability measure on  $G$ .

Consider the **right convolution operator**  $\phi_\mu : l^\infty(G) \rightarrow l^\infty(G)$  defined by :

$$\phi_\mu(f)(h) = \sum_{g \in G} \mu(g) f(hg), \quad \forall f \in l^\infty(G), \forall h \in G. \quad (9.3)$$

The operator  $\phi_\mu$  describes a random walk on the group  $G$  where the transition probability from  $\gamma \in G$  to  $\sigma \in G$  is  $\mu(\gamma^{-1}\sigma)$ . The Poisson boundary of  $\phi_\mu$  is the space of  $\mu$ -harmonic functions in  $L^\infty(G)$  :

$$\text{fix}(\phi_\mu) := \left\{ f \in l^\infty(G) \mid \forall h \in G, \sum_{g \in G} \mu(g) f(hg) = f(h) \right\},$$

it is the set of fixed points of  $\phi_\mu$ .

Now we regard  $l^\infty(G)$  as a von Neumann subalgebra of  $B(l^2(G))$  as multiplication operators  $l^\infty(G) \ni f \rightarrow M_f \in B(l^2(G))$  such that :

$$\forall f_1 \in l^2(G), \quad M_f(f_1) = f_1 f.$$

We can extend  $\phi_\mu$  to  $B(l^2(G))$ . We denote  $\Phi_\mu$  the non-commutative extension of  $\phi_\mu$  :

$$\Phi_\mu : B(l^2(G)) \ni x \mapsto \Phi_\mu(x) := \sum_{g \in G} \mu(g) \rho(g) x \rho(g^{-1}) \in B(l^2(G)),$$

where  $\rho : l^2(G) \rightarrow l^2(G)$  is the right regular representation of  $G$  defined by : for all  $g \in G$ ,  $f \in l^2(G)$ ,

$$\rho(g)(f)(x) = f(xg).$$

**Proposition 9.7** *The map  $\Phi_\mu$  is a unital quantum channel.*

*Proof:* According to 9.2,  $\Phi_\mu$  is a normal completely positive map of  $B(l^2(G))$ . A set of Kraus operators is  $\left\{ \sqrt{\mu(g)}\rho(g), \sqrt{\mu(g^{-1})}\rho(g^{-1}) \mid g \in \text{supp}(\mu) \right\}$ . Moreover since for all  $g \in G$ ,  $\rho(g)$  is unitary whose inverse is  $\rho(g^{-1})$ , we have :

$$\sum_{g \in G} \mu(g)\rho(g)\rho(g^{-1}) = \sum_{g \in G} \mu(g)\rho(g^{-1})\rho(g) = I_{l^2(G)}.$$

Thus the map  $\Phi_\mu$  is unital and trace preserving.  $\square$

The link between  $\Phi_\mu$  and  $\phi_\mu$  is given by the relation for all  $f \in l^\infty(G)$ ,

$$\Phi_\mu(M_f) = M_{\phi_\mu(f)}.$$

We deduce :

**Proposition 9.8** *Let  $f \in l^\infty(G)$ , a function  $f$  is an element of  $\text{fix}(\phi_\mu)$  if and only if the multiplication operator  $M_f$  is an element of  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$ .*

By using this proposition, the function  $f \in l^\infty(G)$  and the operator  $M_f \in B(l^2(G))$  can be identified. The Poisson boundary of  $\Phi_\mu$  restricted to  $l^\infty(G)$  is :

$$\text{fix}(\phi_\mu) = \text{Fix}(\Phi_\mu) \cap l^\infty(G).$$

#### 9.4.2 The commuting algebra of Kraus operators of $\Phi_\mu$

If  $S$  is a subset of  $B(K)$ , we denote  $W^*(S)$  the von Neumann algebra spanned by  $S$ . Let  $R(G) := W^*\{\rho(g) \mid g \in G\}$  and  $L(G) := W^*\{\lambda(g) \mid g \in G\}$  where  $\lambda : l^2(G) \rightarrow l^2(G)$  is the left regular representation of  $G$  on  $l^2(G)$  defined by : for all  $g \in G$ ,  $f \in l^2(G)$ ,

$$\lambda(g)(f)(x) = f(g^{-1}x).$$

There are relations between these two sets [21] :

$$R(G)' = L(G) \text{ and } L(G)' = R(G).$$

**Proposition 9.9** *Let  $H$  be the subgroup of  $G$  generated by  $\text{supp}\{\mu\}$ . Consider the quotient of  $G$  by  $H$ ,  $H \backslash G = \bigsqcup_{t \in T} tH$ , where  $T$  is a system of representatives for the right cosets in  $H \backslash G$ . then :*

$$\mathcal{A}' \approx L(H) \otimes B(l^2(T)).$$

*Proof:* As  $H \backslash G = \bigsqcup_{t \in T} tH$ , we have the following identifications between Hilbert spaces :

$$l^2(G) = \bigoplus_{t \in T} l^2(tH) \approx \bigoplus_{t \in T} l^2(H) \approx l^2(H) \otimes l^2(T).$$

With the first identification, we have

$$l^2(G) \ni f \rightarrow \sum_{t \in T} f \mathbf{1}_{tH} = \sum_{t \in T} f_t \in \bigoplus_{t \in T} l^2(H),$$

where for all  $t \in T$ ,  $f_t := f \mathbf{1}_{tH}$ .

We denote  $\rho_G : l^2(G) \rightarrow l^2(G)$  the right regular representation of  $G$  and  $\rho_H : l^2(H) \rightarrow l^2(H)$  the right regular representation of  $H$ . For all  $f \in l^2(G)$ ,  $h \in H$ ,

$$\rho_G(h)f = \sum_{t \in T} \rho_G(h)f_t = \sum_{t \in T} \rho_H(h)f_t \approx (\rho_H(h) \otimes I_{l^2(T)}) f.$$

From this, we deduce that :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}' &= \left\{ \sqrt{\mu(g)}\rho(g), \sqrt{\mu(g^{-1})}\rho(g^{-1}) \mid g \in \text{supp}(\mu) \right\}' = \{\rho_G(g) \mid g \in H\}' \\ &= \left\{ \lambda_H(h) \otimes I_{l^2(T)} \mid h \in H \right\}' \approx L(H) \otimes B(l^2(T)),\end{aligned}$$

where  $\lambda_H : l^2(H) \rightarrow l^2(H)$  is the left regular representation of  $H$ .  $\square$

The support of  $\mu$  is denoted  $\text{supp}\{\mu\}$ . In the case where the support  $\text{supp}\{\mu\}$  of  $\mu$  generates  $G$ , the probability measure  $\mu$  is said to be **adapted** to  $G$ .

**Corollary 9.10** *If the probability measure  $\mu$  is adapted to  $G$ , then :*

$$\mathcal{A}' = L(G).$$

It is known (see [41, 38]) that the Poisson boundary of  $\phi_\mu$  can be identified with  $L^\infty(\Omega, \nu)$  for some probability space  $(\Omega, \nu)$ .

We have both inclusions :

$$\begin{aligned}L^\infty(\Omega, \nu) \approx \text{fix } \phi_\mu &\subset \text{Fix}(\Phi_\mu) \\ L(G) &\subset \text{Fix}(\Phi_\mu)\end{aligned}$$

On the other hand, Izumi showed that the Poisson boundary of  $\Phi_\mu$  can be naturally identified with the crossed product  $L^\infty(\Omega, \nu) \rtimes G$  in [35].

**Proposition 9.11** *Assume that the probability measure  $\mu$  is adapted to  $G$  and that  $\text{fix}(\phi_\mu) \neq \mathbb{C}1_G$ , that is the Poisson boundary of  $\phi_\mu$  is non-trivial. Then :*

$$\mathcal{A}' \neq \text{Fix}(\Phi_\mu).$$

*Proof:* Let  $f \in l^\infty(G)$  be a non constant function in the Poisson boundary of  $\phi_\mu$ . According to 9.8, the multiplication operator  $M_f : l^2(G_k) \ni l \rightarrow fl \in l^2(G_k)$  is an element of  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$ . Let us prove that  $M_f \notin L(G)$ .

Assume that  $M_f \in L(G) = \mathcal{A}'$ , then  $M_f$  commutes with all  $(\rho(g))_{g \in G}$  :

$$M_f \rho(g) = \rho(g) M_f, \quad \forall g \in G.$$

We apply this equality to the function equal to 1 on  $G$  :

$$f(x) = f(gx), \quad \forall g, x \in G,$$

This shows that  $f$  is constant on  $G$  which is a contradiction. Thus  $\mathcal{A}' \neq \text{Fix}(\Phi_\mu)$ .  $\square$

**Example 9.12** *Let  $G$  be a non-amenable group equipped with an adapted probability measure. Then  $\text{fix}(\phi_\mu) \neq \mathbb{C}1_G$  (see proposition 7.1 in [9] page 77). For instance, let  $\mathbb{F}_k$  be the free group with  $k$  generators  $a_1, \dots, a_k$  for  $k \geq 2$ . We define a probability measure  $\mu$  on  $\mathbb{F}_k$  defined by  $\mu = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \delta_{a_j}$ . Since the group  $\mathbb{F}_k$  is non-amenable and the probability measure  $\mu$  is adapted to  $\mathbb{F}_k$ , we have :*

$$\mathcal{A}' \neq \text{Fix}(\Phi_\mu).$$

**Proposition 9.13** [73] *If the probability measure  $\mu$  is adapted to  $G$ , then  $\mathcal{A}' = L(G)$  is injective, if and only if the group  $G$  is amenable.*

## 9.5 A counter-example to two conjectures

In [4], Arias, Gheonda and Gudder compare the commutant of Kraus operators of a unital quantum operation and its Poisson boundary. They stated the following natural conjectures :

**Conjecture 9.14** *Let  $\Phi$  be a unital quantum operation, let  $\mathcal{A}'$  be the commutant of Kraus operators of  $\Phi$ . If  $\mathcal{A}'$  is injective then  $\text{Fix}(\Phi) = \mathcal{A}'$ .*

**Conjecture 9.15** *Let  $\Phi$  be a unital quantum operation and  $\mathcal{A}'$  the commutant of Kraus operators of  $\Phi$ . Then  $\text{Fix}(\Phi)$  the injective envelope of  $\mathcal{A}'$ .*

We will answer negatively to these conjectures by using a Markov operator on the lamplighter groups and results from section 9.4.

### 9.5.1 Lamplighter groups

Let  $k \geq 1$  be an integer. We introduce lamplighter groups  $G_k$  defined as the wreath product of the  $k$ -dimensional integer lattice  $\mathbb{Z}^k$  by  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . We define the direct sum of isomorphic copies of  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  indexed by  $\mathbb{Z}^k$  as the group :

$$\bigoplus_{\mathbb{Z}^k} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \left\{ \varphi : \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \mid \varphi(x) = 0 \text{ for almost all } x \in \mathbb{Z}^k \right\}.$$

The group  $\mathbb{Z}^k$  acts on  $\bigoplus_{\mathbb{Z}^k} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  by shifting the coordinates :

$$(T_{\xi_1} \varphi)(\xi_2) = \varphi(\xi_2 - \xi_1), \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{Z}^k, \quad \forall \varphi \in \bigoplus_{\mathbb{Z}^k} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Let us introduce the lamplighter group as the corresponding semi-direct product :

$$G_k := \mathbb{Z}^k \ltimes \bigoplus_{\mathbb{Z}^k} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

thus the law on  $G_k$  is given by :

$$(\xi_1, \varphi_1)(\xi_2, \varphi_2) = (\xi_1 + \xi_2, \varphi_1 + T_{\xi_1}(\varphi_2)), \quad \forall (\xi_1, \varphi_1), (\xi_2, \varphi_2) \in G_k.$$

### 9.5.2 Properties of lamplighter groups

Let  $G_k$  be the lamplighter group and let  $\mu$  be an adapted probability measure on  $G_k$ . We define the unital quantum operation  $\Phi_\mu$  as in section 9.4 :

$$\Phi_\mu : B(l^2(G_k)) \ni x \longmapsto \Phi_\mu(x) := \sum_{g \in G_k} \mu(g) \rho(g) x \rho(g^{-1}) \in B(l^2(G_k)),$$

where  $\rho$  is the right regular representation of  $G_k$  on  $l^2(G_k)$ .

**Theorem 9.16** *Let  $k \geq 3$ . There exists a non-degenerate probability measure  $\mu$  on  $G_k$  such that  $\mathcal{A}'$  is injective and  $\text{Fix}(\Phi_\mu) \neq \mathcal{A}'$ .*

*Proof:* It is proved in Proposition 6.1 of [43] that there exists a non-degenerate probability measure  $\mu$  on  $G_k$  such that the Poisson boundary of  $\Phi_\mu$  restricted to  $l^\infty(G_k)$  is non trivial i.e.  $L^\infty(\Omega, \nu)$  is non trivial.

According to Proposition 9.11, this shows that  $\text{Fix}(\Phi_\mu) \neq \mathcal{A}'$ .

Moreover as an extension of amenable (in fact abelian) groups,  $G_k$  is an amenable group. Hence Proposition 9.13 implies that  $L(G_k)$  the von Neumann algebra generated by the left regular representation of  $G_k$  on  $l^2(G_k)$  is injective. Thus  $\mathcal{A}' = L(G_k)$  is injective and  $\text{Fix}(\Phi_\mu) \neq \mathcal{A}'$ .  $\square$

With the above proposition, we answer to the negative to the first Conjecture 9.14. In the case of lamplighter group, the injective envelope of  $\mathcal{A}'$  is not  $\text{Fix}(\Phi_\mu)$ . In fact, the injective envelope of  $\mathcal{A}'$  coincides with  $\mathcal{A}'$ , since  $\mathcal{A}'$  is injective. However as seen in Theorem 9.16,  $\mathcal{A}' \neq \text{Fix}(\Phi_\mu)$ . This gives a negative answer to Conjecture 9.15.

## 9.6 Acknowledgements

The author wishes to thank Bachir Bekka and Dimitri P  tritis for their advise, the IRMAR for the stimulating atmosphere and the quality of working conditions and the referee for his comments and advise.





## Chapitre 10

# Conclusion et perspectives

Donnons un bref résumé du travail effectué dans cette thèse, ainsi que des perspectives de recherches.

Dans l'article "Noncommutative Poisson boundary of quantum operations" [51] qui fait l'objet des chapitres 6 et 9, nous avons établi un isomorphisme d'algèbres de von Neumann entre la frontière de Poisson d'une opération quantique et la frontière de Poisson de sa dilatation isométrique minimale. Pour cela, nous avons muni la frontière de Poisson d'un produit, qui en fait une algèbre de von Neumann et utiliser les résultats de Popescu. Pour pouvoir répondre aux conjectures de Arias, Gheonda et Gudder, nous avons établi le lien entre la théorie des frontières de Poisson des marches aléatoires sur des groupes discrets et les travaux sur les points fixes des opérations quantiques. Nous avons cherché notamment un groupe discret moyennable qui admettait une frontière de Poisson commutative non triviale : le groupe des allumeurs de réverbères.

Le travail effectué conduit à plusieurs projets de recherche : les **corrections d'erreurs d'une opération quantique** en dimension infinie, des exemples non triviaux de **dilatations isométriques minimales**.

1. Lorsque  $\Phi$  est une application normale complètement positive unifère un isomorphisme d'algèbres de von Neumann a été mis en évidence entre  $\text{Fix}(\Phi)$  et le commutant de la dilatation minimale de  $\Phi$ . Cette identification reste néanmoins théorique car la dilatation isométrique minimale de  $\Phi$  est difficile à déterminer explicitement. Il n'existe pas d'exemples concrets de dilatations isométriques. La recherche d'exemples non triviaux pourraient mettre en évidence d'autres propriétés de la frontière de Poisson.
2. La théorie des corrections d'erreurs d'un canal quantique en dimension infinie n'a pas été abordée. Ce travail s'inscrit dans la théorie quantique de l'information et a déjà été esquissé par Beny, Kempf et Kribs dans [12]. Pour plus de généralités, on peut de référer à [59].

Le travail effectué dans le chapitre 7 sur les groupoïdes a permis d'obtenir une identification théorique des frontières de Poisson commutative et noncommutative sur un groupoïde discret. Les résultats d'Izumi [35] valables dans le cadre d'un groupe discret ont été généralisés. L'un des projets de recherche serait d'étudier des **exemples notamment à partir de marches aléatoires sur des graphes orientés ou des relations d'équivalence**.

Dans l'article "Quantum trajectories on infinite-dimensional Hilbert spaces" [50] qui fait l'objet du chapitre 8, nous avons généralisé des résultats sur les trajectoires quantiques, connus en dimension finie au cadre de la dimension infinie, plus particulièrement dans le cadre d'un espace de Hilbert séparable. Cette généralisation n'est pas aisée. Cela

nous a conduit à étudier la théorie des opérateurs sur un espace de Hilbert, le rôle des matrices étant joué par des opérateurs. Il a fallu en premier lieu généraliser les inégalités de Nielsen. Nous avons défini un nouveau cadre d'étude. Pour pouvoir définir la trajectoires quantiques correctement, ces dernières sont à valeurs dans les états normaux de  $B(\mathcal{H})$ . La non compacité des états normaux pour la norme  $\|\cdot\|_1$  est une difficulté à surmonter. Pour pouvoir pallier à ce manque de compacité, l'étude des trajectoires quantiques s'est placée dans le cadre où la mesures quantiques est à valeurs dans une algèbre fortement compacte.

Ces résultats nous conduisent donc à plusieurs perspectives de recherche :

1. Nous avons obtenu une condition pour qu'un système quantique subissant des mesures quantiques répétées se purifient asymptotiquement. L'une des questions qui se posent naturellement est la **vitesse de purification**. On aimerait étudier cette vitesse et mettre en évidence éventuellement un **théorème de type limite centrale**. La purification est intimement liée aux propriétés des moments et leurs convergences. Cette étude implique donc de mieux connaître ces vitesses de convergence.
2. Certains résultats dans la théorie des opérateurs sur un espace de Hilbert mériteraient d'être approfondis, notamment l' **étude des états normaux**. En dimension infinie, la non-compacité de l'ensemble des états normaux rend difficile la généralisation des résultats de Kümmerer et Maassen dans le cas général. Nous nous sommes placés dans le cas où la mesure quantique est à valeurs dans une algèbre fortement compacte. De nouvelles propriétés de convergence sur les états normaux permettraient de se placer peut-être dans un cadre encore plus général.

# Bibliographie

- [1] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault. *Amenable groupoids*. L'Enseignement Mathématique, 2000.
- [2] W. Appel. *Mathématiques pour la physique et les physiciens*. H & K, 2002.
- [3] J. Arazy. More on convergence in unitary matrix spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 83 :44–48, 1981.
- [4] A. Arias, A. Gheondea, and S. Gudder. Fixed points of quantum operations. *Journal of Mathematical Physics*, 43(12) :5872–5881, 2002.
- [5] W. Arveson. *Noncommutative dynamics and E-semigroups*. Springer Verlag, 2003.
- [6] W. Arveson. Noncommutative Poisson boundaries. *unpublished : available from <http://math.berkeley.edu/arveson/Dvi/290F04/22Sept.pdf>, September, 2004.*
- [7] W. Arveson. The asymptotic lift of a completely positive map. *Journal of Functional Analysis*, 248(1) :202–224, 2007.
- [8] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers. *Physical Review Letters*, 49(25) :1804–1807, 1982.
- [9] M. Babilot. An introduction to Poisson boundaries of Lie groups. *Probability measures on groups : recent directions and trends*, pages 1–90, 2006.
- [10] B. Bekka, P. de La Harpe, and A. Valette. *Kazhdan's property (T)*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [11] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W.K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*, 70(13) :1895–1899, 1993.
- [12] C. Bény, A. Kempf, and D.W. Kribs. Quantum error correction on infinite-dimensional Hilbert spaces. *Journal of Mathematical Physics*, 50(6) :2108, 2009.
- [13] H. Brandt. Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes. *Mathematische Annalen*, 96(1) :360–366, 1927.
- [14] O. Bratteli, D.E. Evans, and P.E.T. Jorgensen. Compactly supported wavelets and representations of the Cuntz relations. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 8(2) :166–196, 2000.
- [15] O. Bratteli, P. Jorgensen, A. Kishimoto, and R.F. Werner. Pure states on  $O_d$ . *J. Operator Theory*, 43 :97–143, 2000.
- [16] O. Bratteli and P.E.T. Jorgensen. Isometries, shifts, Cuntz algebras and multiresolution wavelet analysis of scaleN. *Integral Equations and Operator Theory*, 28(4) :382–443, 1997.
- [17] M.D. Choi. Completely positive linear maps on complex matrices. *Linear Algebra and Its Applications*, 10(3) :285–290, 1975.

- [18] M.D. Choi and E.G. Effros. Injectivity and operator spaces. *J. Funct. Anal.*, 24(2) :156–209, 1977.
- [19] A. Connes. Classification of Injective Factors Cases  $II_1$ ,  $II_\infty$ ,  $III_\lambda$ ,  $\lambda \neq 1$ . *Annals of Mathematics*, 104(1) :73–115, 1976.
- [20] A. Connes. *Géométrie non commutative*. InterEditions, 1990.
- [21] J.B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Springer Berlin, 1990.
- [22] J. Cuntz. Simple  $C^*$ -algebra generated by isometries. *Communications in mathematical physics*, 57(2) :173–185, 1977.
- [23] G.F. Dell’Antonio. On the limits of sequences of normal states. *Commun. Pure Appl. Math.*, 413 :429, 1967.
- [24] J. Dixmier. *Les Algèbres d’opérateurs dans l’espace hilbertien : algèbres de Von Neumann*. Gauthier-Villars, 1969.
- [25] O. Dreyer, F. Markopoulou, and L. Smolin. Symmetry and entropy of black hole horizons. *Nuclear Physics, Section B*, 744(1-2) :1–13, 2006.
- [26] E.G. Effros and Z.J. Ruan. *Operator spaces*. Oxford University Press, USA, 2000.
- [27] D.E. Evans and JT Lewis. *Dilations of irreversible evolutions in algebraic quantum theory*. Dublin Institute for Advanced Studies, 1977.
- [28] J. Hakeda and J. Tomiyama. On some extension properties of von Neumann algebras. *Tohoku Math. J.*, 19 :305–323, 1967.
- [29] M. Hamana. Injective envelopes of operator systems. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 15(3) :773–785, 1979.
- [30] K.E. Hellwig and K. Kraus. Pure operations and measurements. *Communications in Mathematical Physics*, 11(3) :214–220, 1969.
- [31] J.A. Holbrook, D.W. Kribs, and R. Laflamme. Noiseless subsystems and the structure of the commutant in quantum error correction. *Quantum Information Processing*, 2(5) :381–419, 2003.
- [32] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [33] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [34] M. Izumi. Non-commutative Poisson boundaries and compact quantum group actions. *Advances in Mathematics*, 169(1) :1–57, 2002.
- [35] M. Izumi. Non-Commutative Poisson Boundaries. In *Discrete Geometric Analysis : Proceedings of the First Jams Symposium on Discrete Geometric Analysis, December 12-20, 2002, Sendai, Japan*, volume 347. American Mathematical Society, 2004.
- [36] W. Jaworski and M. Neufang. The Choquet–Deny Equation in a Banach Space. *Canad. J. Math.*, 59(4) :795–827, 2007.
- [37] P.E.T. Jorgensen. Minimality of the data in wavelet filters. *Advances in Mathematics*, 159(2) :143–228, 2001.
- [38] V.A. Kaimanovich. Boundaries of invariant Markov operators : the identification problem. *London Mathematical Society lecture note series*, pages 127–176, 1996.
- [39] V.A. Kaimanovich. Amenability and the Liouville property. *Israel Journal of Mathematics*, 149(1) :45–85, 2005.
- [40] V.A. Kaimanovich. Poisson boundary of discrete groups. *Space*, 50 :1, 2007.

- [41] V.A. Kaimanovich and S. Edinburg. Measure-theoretic boundaries of markov chains, 0-2 laws and entropy . *Harmonic analysis and discrete potential theory*, page 145, 1992.
- [42] VA Kaimanovich, Y. Kifer, and B.Z. Rubshtein. Boundaries and harmonic functions for random walks with random transition probabilities. *Journal of Theoretical Probability*, 17(3) :605–646, 2004.
- [43] V.A. Kaimanovich and A.M. Vershik. Random walks on discrete groups : boundary and entropy. *The Annals of Probability*, pages 457–490, 1983.
- [44] D.W. Kribs. Quantum channels, wavelets, dilations and representations of  $O_n$ . *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 46(02) :421–433, 2003.
- [45] D.W. Kribs and F. Markopoulou. Geometry from quantum particles. *Arxiv preprint gr-qc/0510052*, 2005.
- [46] B. Kümmerer and H. Maassen. Elements of quantum probability. *Quantum Probability Communications*, 10 :73–100, 1998.
- [47] B. Kümmerer. Quantum Markov Processes and Applications in Physics. *Lecture notes in mathematics - Springer Verlag*, 1866 :259–328, 2005.
- [48] M. Lacruz, V. Lomonosov, and L. Rodríguez-Piazza. Strongly compact algebras. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A : Matemáticas (RACSAM)*, 100(1-2) :191–207, 2006.
- [49] M. Lacruz and L. Rodríguez-Piazza. Strongly compact normal operators. *AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY*, 137(8) :2623–2630, 2009.
- [50] B.J. Lim. Mixed quantum measurements and quantum trajectory on infinite-dimensional Hilbert spaces. *submitted*, 2009.
- [51] B.J. Lim. Noncommutative Poisson boundaries of unital quantum operations. *Journal of Mathematical Physics*, 51 :052202, 2010.
- [52] F. Löffler and W. Timmermann. Singular states on maximal  $O_p^*$ -algebras. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 22(4) :687, 1987.
- [53] H. Maassen and B. Kümmerer. Purification of quantum trajectories. *Dynamics & stochasticity*, 48 :252–261, 2006.
- [54] M. Marsalli. A classification of operator algebras. *J. Operator Theory*, 24(1) :155–163, 1990.
- [55] M. Nakamura. A proof of a theorem of Takesaki. *Kodai Math. Sem. Rep*, 10 :189–190, 1958.
- [56] J. Neveu. *Calcul des probabilités*. Masson et C-ie, Editeurs, 1964.
- [57] J. Neveu. *Martingales à temps discret*. Masson Paris, 1972.
- [58] M.A. Nielsen. Characterizing mixing and measurement in quantum mechanics. *Physical Review A*, 63(2) :22114, 2001.
- [59] M.A. Nielsen and I.L. Chuang. *Quantum Computing and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [60] V.I. Paulsen. *Completely Bounded Maps and Operator Algebras*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [61] V.I. Paulsen. *Completely bounded maps and operator algebras*. Cambridge Univ Pr, 2002.
- [62] D. Petritis. Mathematical foundations of quantum mechanics and its applications. *Preliminary version*, 2006.

- [63] M.B. Plenio and P.L. Knight. The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics. *Reviews of Modern Physics*, 70(1) :101–144, 1998.
- [64] G. Popescu. Isometric dilations for infinite sequences of noncommuting operators. *Transactions of the American Mathematical Society*, 316(2) :523–536, 1989.
- [65] B. Prunaru. Lifting fixed points of completely positive mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 350(1) :333–339, 2009.
- [66] J. Renault. *A groupoid approach to  $C^*$ -algebras*. Springer-Verlag, 1980.
- [67] D.W. Robinson. Normal and locally normal states. *Communications in Mathematical Physics*, 19(3) :219–234, 1970.
- [68] J. Rosenblatt. Ergodic and mixing random walks on locally compact groups. *Mathematische Annalen*, 257(1) :31–42, 1981.
- [69] M.B. Ruskai, S. Szarek, and E. Werner. An analysis of completely-positive trace-preserving maps on  $\mathcal{M}_2$ . *Linear Algebra and its Applications*, 347(1-3) :159–187, 2002.
- [70] S. Sakai.  *$C^*$ -algebras and  $W^*$ -algebras*. Springer Verlag, 1998.
- [71] T. Sierocinski, A. Le Behec, N. Theret, and D. Petritis. Semantic distillation : a method for clustering objects by their contextual specificity. *Studies in Computational Intelligence*, 129 :431–442, 2008.
- [72] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras I. Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, 124. Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [73] M. Takesaki. *Theory of operator algebras. II. Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, 125. *Operator Algebras and Non-commutative Geometry*, 6. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [74] M. Takesaki. *Theory of operator algebras. III. Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, 127. *Operator Algebras and Non-commutative Geometry*, 8. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [75] R. Tessera and Y. de Cornulier. Paradoxe de Banach-Tarski et groupes moyennables. *unpublished*, 2001.
- [76] B.T. Varcoe, S. Brattke, M. Weidinger, and H. Walther. Preparing pure photon number states of the radiation field. *Nature*, 403(6771) :743–746, 2000.
- [77] J. von Neumann. Zur allgemeinen theorie des masses. *Fund. math*, 13 :73–116, 1929.
- [78] P. Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer Berlin, 2000.